Elektrotechnika – elektronika

Jegyzet és képletgyűjtemény

0. Bevezető: hogyan tanulj ebből

0.1 A tárgy és a számonkérés

Üdv az Elektrotechnika – elektronika felkészítőn!

Szia! Ez az oktatóanyag végigvezet az Elektrotechnika – elektronika tárgy teljes anyagán, a legelső fogalmaktól a vizsgafeladatokig.

Az anyag a nulláról indul – előismeret nem kell.

Az anyag rövid videóklipekből áll. Minden klip egyetlen témát magyaráz el, így bármikor megállhatsz és folytathatod.

- 16 modul, modulonként néhány rövid klip
- minden modulhoz jegyzet, képletkártya, mintafeladatok és ellenőrző kérdések
- a mintafeladatok az órai feladatokból és a példatárból valók

A tárgy két nagy részből áll: az elektrotechnikából, vagyis az áramkörökből és a villamos gépekből, valamint az elektronikából, vagyis a félvezetőkből.

Rész	Témák
Elektrotechnika	áramkörök, váltakozó áram, három fázis, transzformátor, villamos gépek, mérés, érintésvédelem
Elektronika	félvezetők, dióda, egyenirányító, bipoláris tranzisztor

A két zárthelyi

A félévben két zárthelyi dolgozatot írsz. Mindkettő 60 perces, és 0-tól 40 pontig értékelik.

	1. ZH	2. ZH
Anyag	1–35. kérdés (áramkörök … transzformátor)	36–70. kérdés (gépek … tranzisztor)
Idő	60 perc	60 perc
Pontszám	0–40	0–40
Elégséges	min. 20 pont	min. 20 pont

Mindkét zárthelyit külön-külön legalább 20 pontra kell megírni. Egy zárthelyi elméleti kérdésekből és számítási feladatokból áll.

★ Mindkét ZH-ban **külön-külön** legalább 20 pont kell.

Zárthelyinként 5 elméleti kérdést kapsz a 70 kérdésből álló kérdéssorból. Ha ebből legalább 3-at helyesen megválaszolsz, és a két zárthelyi összesen legalább 60 pont, megajánlott jegyet kaphatsz.

Összpontszám (2 ZH)	Megajánlott jegy
60–69 pont	jó (4)
70–80 pont	jeles (5)

A vizsga

Ha nem kapsz megajánlott jegyet, írásbeli vizsgát teszel. Ott is 40 pont a maximum, és 20 ponttól van elégséges.

Vizsga pontszám	Jegy
20–24	elégséges (2)
25–29	közepes (3)
30–34	jó (4)
35–40	jeles (5)

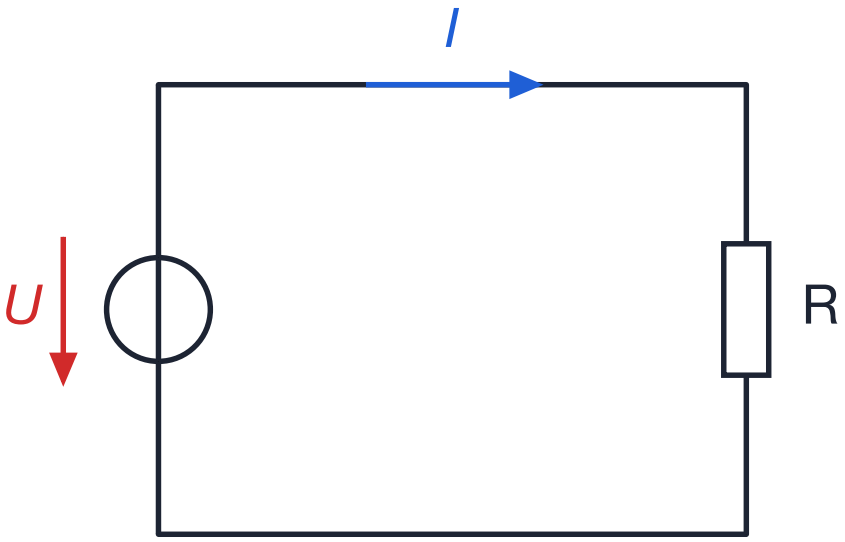
Hogyan kapod meg a 3 pontot egy elméleti kérdésre?

Az órán elhangzott, hogyan pontozzák az elméleti kérdéseket. Egy kérdés 3 pontot ér, és három dolgot várnak el.

A 3 PONTOS VÁLASZ

képlet + ábra + egy összefoglaló mondat

Kell a képlet, kell egy ábra, és kell egy mondat, amely a saját szavaiddal összefoglalja a lényeget.



1. **Képlet** – pl. $U = R \cdot I$
2. **Ábra** – egy kicsi, áttekinthető rajz
3. **Mondat** – a lényeg egy mondatban, saját szavakkal

Fontos: ne másold szó szerint a kidolgozott választ, mert az oktató észreveszi. Értsd meg, és fogalmazd meg a saját szavaiddal.

> ⚠ A szó szerint visszaírt válasz gyanús – a megértés a cél, nem a magolás.

Ebben az anyagban minden kérdéshez találsz ilyen szerkezetű mintaválaszt, a modulok végén.

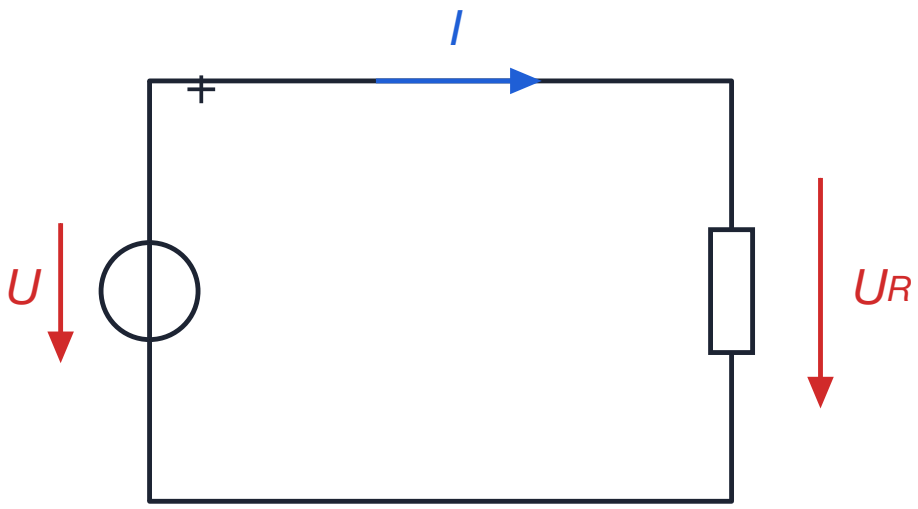
EZT JEGYEZD MEG!

- 2 ZH, mindkettő 60 perc, 0–40 pont, min. 20 pont.
- ZH-nként 5 elméleti kérdés a 70-ből.
- Elméleti válasz: képlet + ábra + mondat.

0.2 Jelölések és a számológép

Áram- és feszültségnyíl

Mielőtt belevágunk, nézzük meg a jelöléseket, mert ezeket végig így használjuk.



A tárgy jelölései (az előadás és a példatár szerint):

Az áram irányát a vezetékre rajzolt nyíllal jelöljük. A pozitív áramirány a generátoron kívül a pozitív pólustól a negatív felé mutat.

ℹ **Kék nyíl**: áram (I). Generátoron kívül a + pólustól a – felé folyik.

A feszültséget az alkatrész mellé rajzolt nyíllal jelöljük, amely a magasabb potenciálú ponttól, vagyis a pozitív végtől, az alacsonyabb felé mutat.

ℹ **Piros nyíl**: feszültség (U). A + végtől a – vég felé mutat – a generátornál is.

Ha egy számolás végén negatív áramot kapsz, az nem hiba: azt jelenti, hogy a valódi áram a bejelölt nyíllal ellentétes irányú.

⚠ Negatív eredmény = az áram a bejelölttel **ellentétes** irányú.

Színek és a számológép

A videókban egységes színeket használunk: az áram kék, a feszültség piros, a végeredmény pedig zöld keretben jelenik meg.

KÉK KERET
fontos képlet

EREDMÉNY végeredmény

EZT JEGYEZD MEG!
- összefoglaló

A zárthelyin számológép kell, mert a váltakozó áramú feladatokban komplex számokkal számolunk.

- Olyan számológép kell, amely tud **komplex számokkal** számolni (algebrai alak ↔ szög alak átváltás).
- A szögeket általában **fokban** adjuk meg – állítsd a gépet fok (DEG) módba.

Állítsd a számológépet fok módba, és gyakorold az átváltást a két alak között. Ezt a váltakozó áramú modulban részletesen megmutatjuk.

$3 + j4 \leftrightarrow 5\angle 53{,}13°$

Most már indulhatunk is. Az első modul az alapfogalmakkal kezdődik.

EZT JEGYEZD MEG!

- Kék nyíl: áram. Piros nyíl: feszültség (+ → –).
- Negatív eredmény: ellentétes irány.
- Számológép: komplex mód, fok (DEG).

Képletkártya

ZH	60 perc, 0–40 pont, elégséges: 20 pont
Megajánlott jegy	60–69 pont: jó (4), 70–80 pont: jeles (5)
Vizsga	20 pont: 2, 25: 3, 30: 4, 35: 5

1. Alapfogalmak

1.1 Töltés, feszültség, áram, ellenállás

A villamos töltés

Minden villamos jelenség oka a villamos töltés. Az atomban a proton pozitív, az elektron negatív töltésű.



> **Villamos töltés** – a proton (+) és az elektron (–) megszüntethetetlen tulajdonsága. Jele Q, mértékegysége As (amperszekundum) = C (coulomb).

A legkisebb töltés az elemi töltés, egy elektron töltése. Ennek nagysága 1,602 szorozva tíz a mínusz tizenkilencediken amperszekundum.

ELEMI TÖLTÉS

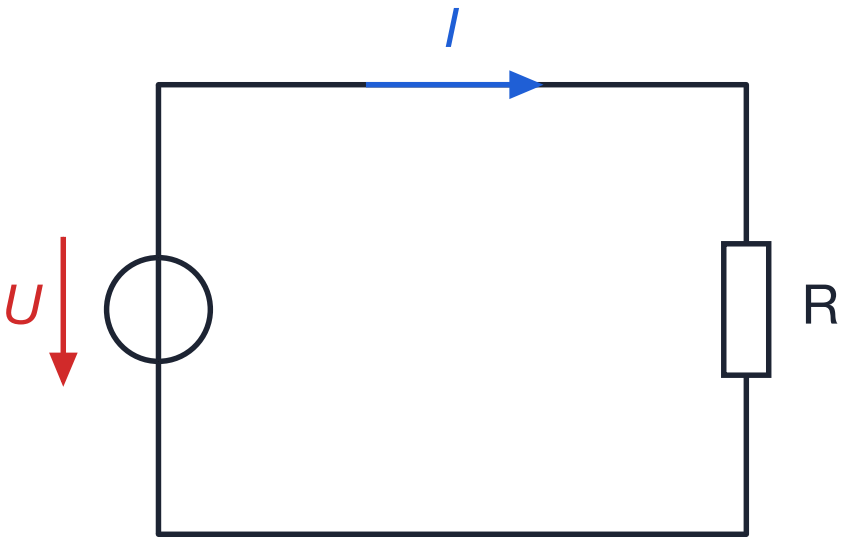
$$e = 1{,}602 \cdot 10^{-19}\ \text{As}$$

Az azonos töltések taszítják, a különbözők vonzzák egymást. Ha a pozitív és negatív töltéseket szétválasztjuk, munkát kell végeznünk, és ez az energia tárolódik.

- azonos töltések: **taszítás**
- különböző töltések: **vonzás**
- töltések szétválasztása = munkavégzés

Feszültség és áram

A feszültség azt mutatja meg, mennyi munkát végez a villamos tér, miközben egységnyi töltést átvisz az egyik pontból a másikba.



FESZÜLTSÉG

$$U = \frac{W}{Q} \; [V = \frac{J}{As}]$$

Jó hasonlat a víz: a feszültség olyan, mint a szintkülönbség két víztartály között. Minél nagyobb, annál erősebben hajtja az áramlást.

ℹ Hasonlat: feszültség ≈ szintkülönbség (nyomás), áram ≈ az átfolyó víz mennyisége.

Az áram a töltések rendezett áramlása. Az áramerősség megmutatja, mennyi töltés halad át a vezető keresztmetszetén egy másodperc alatt.

ÁRAMERŐSSÉG

$$I = \frac{Q}{t} \; [A]$$

Egy amper azt jelenti, hogy másodpercenként körülbelül 6,24 szorozva tíz a tizennyolcadikon elektron halad át.

$$1\ A \approx 6{,}24 \cdot 10^{18}\ \text{elektron} / s$$

Ellenállás és az áramkör

Az ellenállás az anyag azon tulajdonsága, hogy akadályozza a töltések áramlását. Jele R, mértékegysége az ohm.

> **Ellenállás** – az anyag töltésáramlást akadályozó tulajdonsága. Jele R, mértékegysége Ω (ohm).

A legegyszerűbb áramkör egy generátorból, vezetékből és egy fogyasztóból áll. Áram csak zárt áramkörben folyik.

- **generátor**: létrehozza a feszültséget
- **vezeték**: összeköti az elemeket
- **fogyasztó** (ellenállás): itt alakul át az energia

Ha az áramkört megszakítjuk, például egy kapcsolóval, áram nem folyik. Ezt nevezzük szakadásnak.

EZT JEGYEZD MEG!

- Q: töltés [As]. U: feszültség [V]. I: áram [A]. R: ellenállás [Ω].
- Áram csak **zárt** áramkörben folyik.

1.2 Mértékegységek és prefixumok

Prefixumok

A műszaki életben nagyon nagy és nagyon kicsi számokkal is dolgozunk. Hogy ne kelljen sok nullát írni, a mértékegység elé egy előtagot, prefixumot teszünk.

név	jel	érték	név	jel	érték
deka	**da**	10^{1}	deci	**d**	10^{-1}
hekto	**h**	10^{2}	centi	**c**	10^{-2}
kilo	**k**	10^{3}	milli	**m**	10^{-3}
mega	**M**	10^{6}	mikro	**µ**	10^{-6}
giga	**G**	10^{9}	nano	**n**	10^{-9}
tera	**T**	10^{12}	piko	**p**	10^{-12}
peta	**P**	10^{15}	femto	**f**	10^{-15}
exa	**E**	10^{18}	atto	**a**	10^{-18}
zetta	**Z**	10^{21}	zepto	**z**	10^{-21}
yotta	**Y**	10^{24}	yokto	**y**	10^{-24}

A prefixum a mértékegység elé írt jel, amely a 10 valamelyik hatványával szoroz.

A nagy értékekhez tartozó prefixumok: kilo, ezerszeres; mega, milliószoros; giga, milliárdszoros. A sor a tera, peta, exa, zetta és yotta prefixummal folytatódik.

$$1\ \mathrm{k\Omega} = 10^{3}\ \Omega,\ 1\ \mathrm{MW} = 10^{6}\ \mathrm{W}$$

A kicsi értékekhez: milli, ezred rész; mikro, milliomod rész; nano, milliárdod rész; utána jön a piko, femto, atto, zepto és yokto.

$$1\ \text{mA} = 10^{-3}\ \text{A},\ 1\ \mu\text{F} = 10^{-6}\ \text{F}$$

Van négy kakukktojás is, amelyek nem ezres lépésekben haladnak: a deka, a hekto, a deci és a centi.

ℹ Kivételek: deka (10), hekto (100), deci (0,1), centi (0,01).

Figyelj a kis és nagy betűkre! A kis m milli, a nagy M mega, ami egymilliárdszoros különbség.

⚠ **m** = milli (10^{-3}), **M** = mega (10^{6})!

Gyakorlás: átváltás

Gyakoroljunk! 4700 ohm egyenlő 4,7 kiloohm.

$$4700\ \Omega = 4{,}7 \cdot 10^{3}\ \Omega = 4{,}7\ \text{k}\Omega$$

0,033 henri egyenlő 33 millihenri, mert ezerrel szorzunk.

$$0{,}033\ \text{H} = 33 \cdot 10^{-3}\ \text{H} = 33\ \text{mH}$$

2,5 mikrofarad egyenlő 2,5 szorozva tíz a mínusz hatodikon farad.

$$2{,}5\ \mu\text{F} = 2{,}5 \cdot 10^{-6}\ \text{F}$$

Az órán elhangzott: az eredményt úgy adjuk meg, hogy a szám 1 és 1000 közé essen, és ehhez válasszunk prefixumot.

★ Az eredményt mindig 1 és 1000 közötti számmal + prefixummal add meg (pl. 0,0339 H → 33,9 mH).

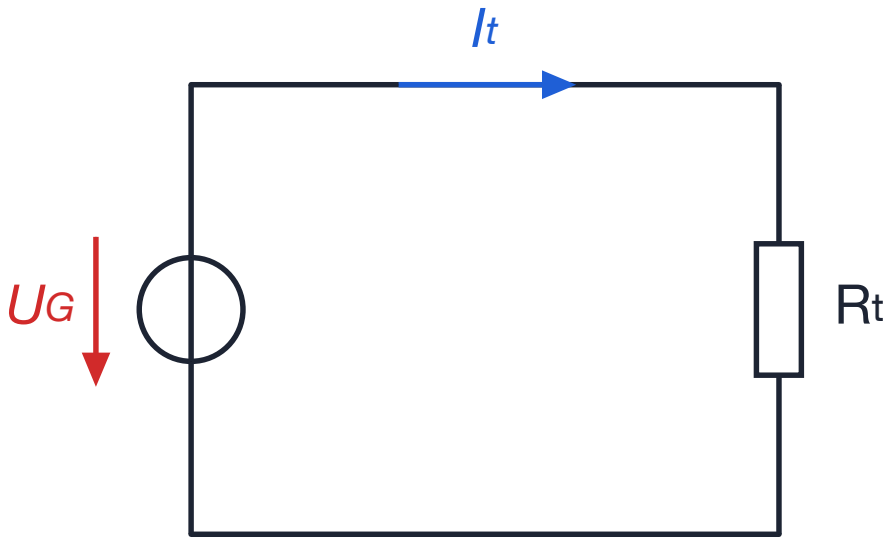
EZT JEGYEZD MEG!

- kilo k 10^{3}, mega M 10^{6}, giga G 10^{9}
- milli m 10^{-3}, mikro μ 10^{-6}, nano n 10^{-9}, piko p 10^{-12}

1.3 Ideális és valóságos generátor

Az ideális feszültséggenerátor

A generátor az az eszköz, amely töltéseket választ szét, és így feszültséget hoz létre. Energiát alakít át villamos energiává.



> **Generátor** – töltésszétválasztással feszültséget létrehozó eszköz (pl. elem, akkumulátor, dinamó).

Az ideális feszültséggenerátor kapocsfeszültsége bármilyen terhelésnél állandó, mindig a forrásfeszültséggel egyenlő.

IDEÁLIS FESZÜLTSÉGGENERÁTOR

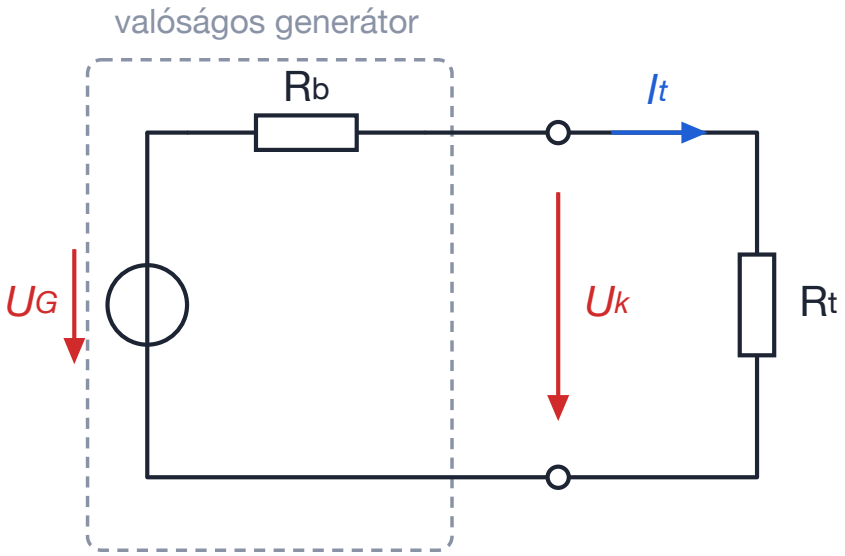
$U_k = U_G$ (bármekkora I_t esetén)

Ez csak úgy lehetséges, ha a generátornak nincs belső ellenállása. A valóságban ilyen nincs, ez egy idealizált modell.

ℹ Ideális generátor: $R_b = 0$. Ez modell – a valóságban mindig van belső ellenállás.

A valóságos feszültséggenerátor

A valóságos generátort egy ideális generátor és egy vele sorba kötött belső ellenállás modellezi.



Valóságos generátor = ideális generátor + soros belső ellenállás R_b.

Ha áram folyik, a belső ellenálláson is esik feszültség. Ezért a kapocsfeszültség kisebb lesz, mint a forrásfeszültség.

KAPOCSFESZÜLTSÉG

$$U_k = U_G - R_b \cdot I_t$$

Két szélső eset van. Üresjárásban nem folyik áram, ekkor a kapocsfeszültség a forrásfeszültséggel egyenlő.

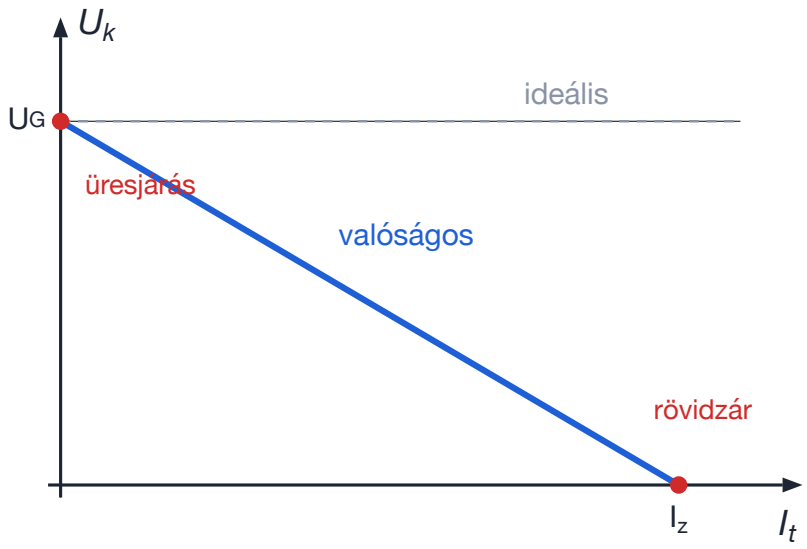
$$\text{üresjárás: } R_t = \infty,\ I_t = 0,\ U_k = U_G = U_ü$$

Rövidzárásban a terhelés ellenállása nulla. Ekkor a kapocsfeszültség nulla, és a legnagyobb áram folyik: a rövidzárási áram.

$$\text{rövidzár: } R_t = 0,\ U_k = 0,\ I_z = \frac{U_G}{R_b}$$

A jelleggörbe

Ha ábrázoljuk a kapocsfeszültséget a terhelő áram függvényében, egy csökkenő egyenest kapunk. Az ideális generátoré vízszintes egyenes lenne.



$U_k(I_t)$ jelleggörbe: üresjárásban U_G, rövidzárban 0.

Az egyenes meredeksége éppen a belső ellenállás. Így a belső ellenállás az üresjárási feszültség és a rövidzárási áram hányadosa.

BELSŐ ELLENÁLLÁS

$$R_b = \frac{U_ü}{I_z}$$

Nagy generátort viszont nem szabad rövidre zárni. Ilyenkor két különböző terhelésnél mérünk, és a feszültség- és áramváltozás hányadosát vesszük.

$$R_b = \frac{\Delta U_k}{\Delta I_t}$$

Egy példa: egy 12 voltos akkumulátor belső ellenállása 0,5 ohm. 4 amperes terhelésnél a kapocsfeszültség 12 mínusz 2, vagyis 10 volt.

$$U_k = 12\ \mathrm{V} - 0{,}5\ \Omega \cdot 4\ \mathrm{A} = 10\ \mathrm{V}$$

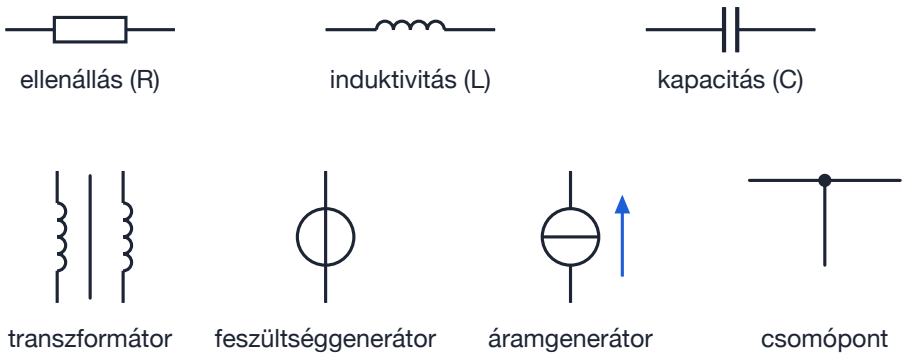
EZT JEGYEZD MEG!

- Ideális: $U_k = U_G$, $R_b = 0$.
- Valóságos: $U_k = U_G - R_b\, I_t$.
- Üresjárás: $I_t = 0$; rövidzár: $U_k = 0$.

1.4 Az áramkör építőelemei

Aktív és passzív elemek

Az áramkör elemeit két csoportba soroljuk. Az aktív elemek energiát adnak a körbe: ezek a generátorok.



- **Aktív elem**: energiát ad le – feszültséggenerátor, áramgenerátor.

A passzív elemek energiát vesznek fel, alakítanak át vagy tárolnak. Ezek az ellenállás, a kondenzátor, vagyis kapacitás, a tekercs, vagyis induktivitás, és a transzformátor.

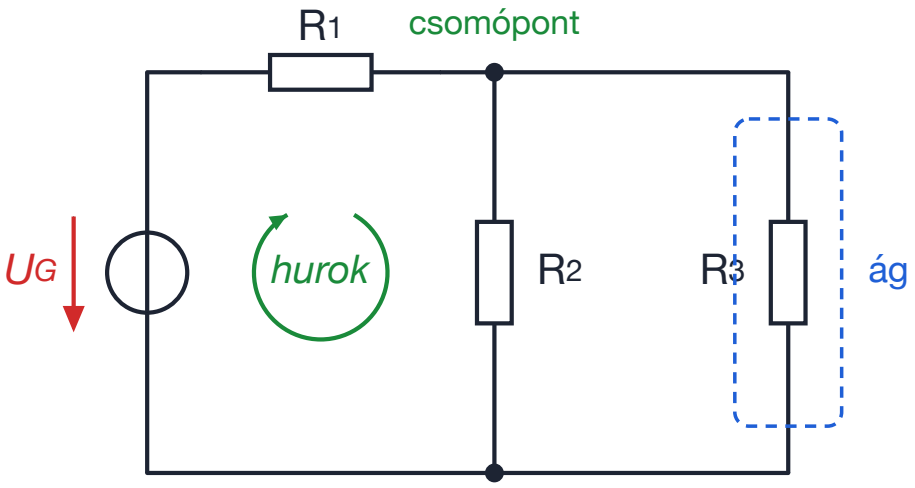
- **Passzív elemek**:
- R – ellenállás (hővé alakít)
- C – kapacitás, kondenzátor (villamos teret tárol)
- L – induktivitás, tekercs (mágneses teret tárol)
- Tr – transzformátor

Az áramkörben vezetékek, csomópontok, mérőműszerek és biztosítók is szerepelnek, ezeknek is van saját rajzjele.

> ℹ További jelölések: vezeték, csomópont, árammérő (A), feszültségmérő (V), olvadóbiztosító, áram- és feszültségnyíl.

Csomópont, ág, hurok

A hálózatszámításhoz három fogalom kell. A csomópont az a pont, ahol legalább három vezeték találkozik.



> **Csomópont** – legalább három vezeték találkozási pontja.

Az ág két csomópont közötti szakasz. Egy ágban minden elemen ugyanaz az áram folyik.

> **Ág** – két csomópont közötti szakasz; az ág elemein ugyanaz az áram folyik.

A hurok pedig egy zárt körút az áramkörben, amelyen végighaladva visszaérünk a kiindulási pontba.

> **Hurok** – az áramkör ágaiból álló zárt körút.

Ezekre a fogalmakra épülnek a Kirchhoff-törvények, amelyeket a következő modulban tanulunk.

EZT JEGYEZD MEG!

- Aktív: generátorok. Passzív: R, L, C, transzformátor.
- Csomópont – ág – hurok.

Képletkártya

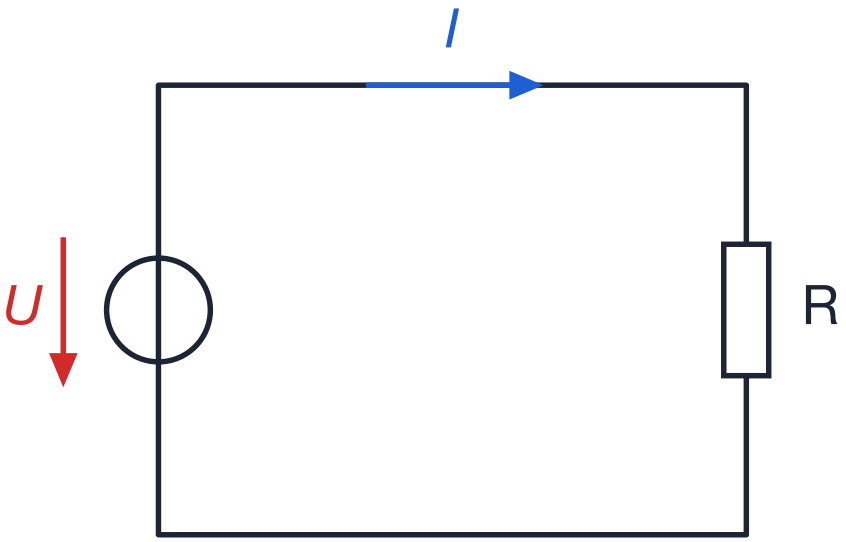
Elemi töltés	$e = 1{,}602 \cdot 10^{-19}\ \mathrm{As}$
Feszültség	$U = \frac{W}{Q}\ [\mathrm{V}]$
Áramerősség	$I = \frac{Q}{t}\ [\mathrm{A}]$
Valóságos generátor	$U_k = U_G - R_b \cdot I_t$
Rövidzárási áram	$I_z = \frac{U_G}{R_b}$
Belső ellenállás	$R_b = \frac{U_ü}{I_z} = \frac{\Delta U_k}{\Delta I_t}$

2. Egyenáramú alaptörvények

2.1 Ohm törvénye és a teljesítmény

Ohm törvénye

Az egyenáramú áramkörök legfontosabb törvénye Ohm törvénye. Egy ellenálláson átfolyó áram egyenesen arányos a rákapcsolt feszültséggel.



OHM TÖRVÉNYE

$$U = R \cdot I$$

Átrendezve: az áram a feszültség osztva az ellenállással, az ellenállás pedig a feszültség osztva az árammal. Két ismert mennyiségből a harmadik mindig kiszámolható.

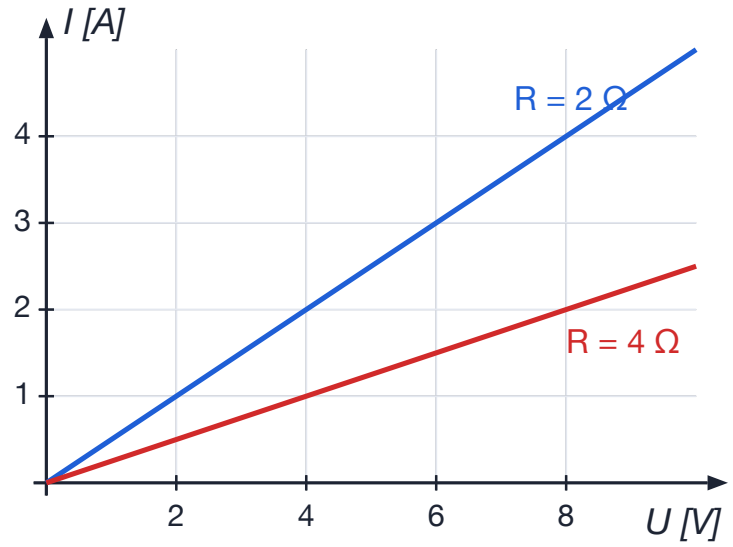
$$I = \frac{U}{R}, R = \frac{U}{I}$$

Az ellenállás reciproka a vezetés. Jele G, mértékegysége a siemens. Ezzel az áram a vezetés és a feszültség szorzata.

VEZETÉS

$$G = \frac{1}{R}\ [S], I = G \cdot U$$

Ha ábrázoljuk az áramot a feszültség függvényében, origón átmenő egyenest kapunk. Minél meredekebb, annál kisebb az ellenállás.



Az I(U) jelleggörbe egyenes; meredeksége a vezetés G = 1/R.

Egy példa: egy 230 voltra kötött 46 ohmos fűtőszálon 230 osztva 46, vagyis 5 amper folyik.

$$I = \frac{230\ V}{46\ \Omega} = 5\ A$$

Villamos munka és teljesítmény

Ha U feszültségen Q töltés halad át, a villamos munka U szorozva Q. Mivel a töltés az áram és az idő szorzata, a munka U szorozva I szorozva t.

VILLAMOS MUNKA

$$W = U \cdot I \cdot t\ [Ws = J]$$

A teljesítmény az időegység alatt végzett munka. Egyenáramnál ez a feszültség és az áram szorzata.

EGYENÁRAMÚ TELJESÍTMÉNY

$$P = U \cdot I\ [W]$$

Ohm törvényét behelyettesítve két másik alakot is kapunk: I négyzet szorozva R, illetve U négyzet osztva R.

$$P = U \cdot I = I^2 \cdot R = \frac{U^2}{R}$$

Az előző példában a fűtőszál teljesítménye 230 volt szorozva 5 amperrel, vagyis 1150 watt.

$$P = 230\ V \cdot 5\ A = 1150\ W = 1{,}15\ kW$$

Az ellenálláson felvett teljesítmény hővé alakul. Ezért melegszenek a vezetékek, és ezen az elven működik az olvadóbiztosító is.

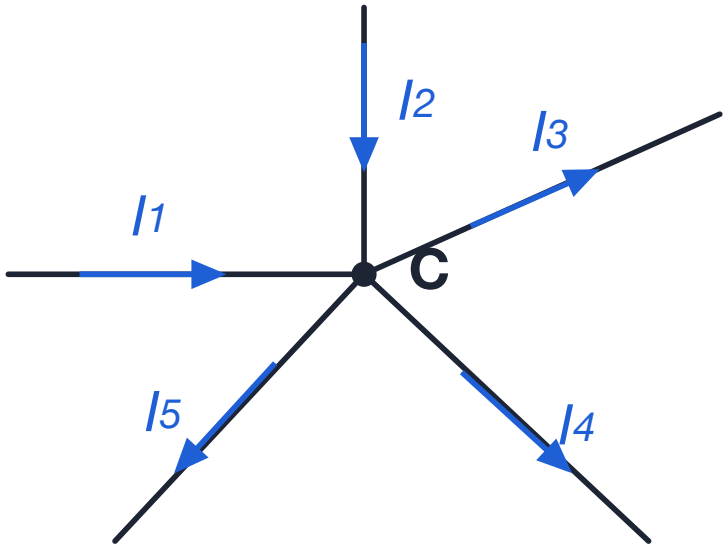
EZT JEGYEZD MEG!

- $U = R \cdot I$ – két adatból a harmadik.
- $P = U \cdot I = I^2 R = U^2/R$.
- $W = U \cdot I \cdot t$.

2.2 Kirchhoff két törvénye

Kirchhoff I. törvénye – csomóponti törvény

Kirchhoff első törvénye a csomópontokra vonatkozik. Azt mondja ki, hogy egy csomópontban a töltés nem keletkezik és nem tűnik el.



> **Kirchhoff I. törvénye** – egy csomópontba befolyó és onnan kifolyó áramok algebrai összege nulla.

Ezért amennyi áram befolyik egy csomópontba, annyinak ki is kell folynia. Vízcsövek elágazásához hasonlít: a víz nem vész el.

$$I_1 + I_2 = I_3 + I_4 + I_5$$

Általános alakban: ha a befolyó áramokat pozitívnak, a kifolyókat negatívnak vesszük, az összegük nulla.

CSOMÓPONTI TÖRVÉNY

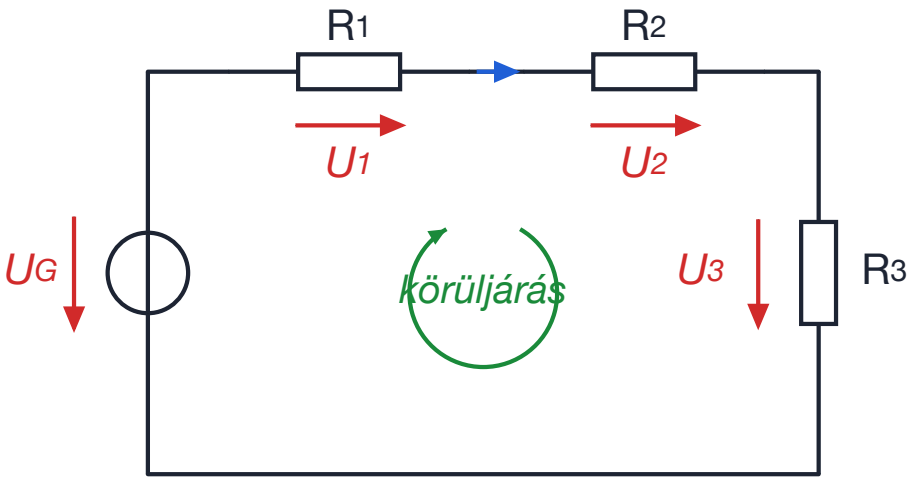
$$\sum_{k=1}^{n} I_k = 0$$

Például ha egy csomópontba 3 és 2 amper folyik be, és az egyik kifolyó ág árama 4 amper, akkor a másik kifolyó ágban 1 amper folyik.

$$3\ \text{A} + 2\ \text{A} = 4\ \text{A} + \text{I} \rightarrow \text{I} = 1\ \text{A}$$

Kirchhoff II. törvénye – huroktörvény

Kirchhoff második törvénye a hurkokra vonatkozik. Egy zárt hurokban a feszültségek előjeles összege nulla.



> **Kirchhoff II. törvénye** – zárt hurokban a részfeszültségek algebrai összege nulla; a forrásfeszültség egyenlő a fogyasztói feszültségek összegével.

Másként fogalmazva: a generátor feszültsége megoszlik a fogyasztók között.

$$U_G = U_1 + U_2 + U_3$$

HUROKTÖRVÉNY

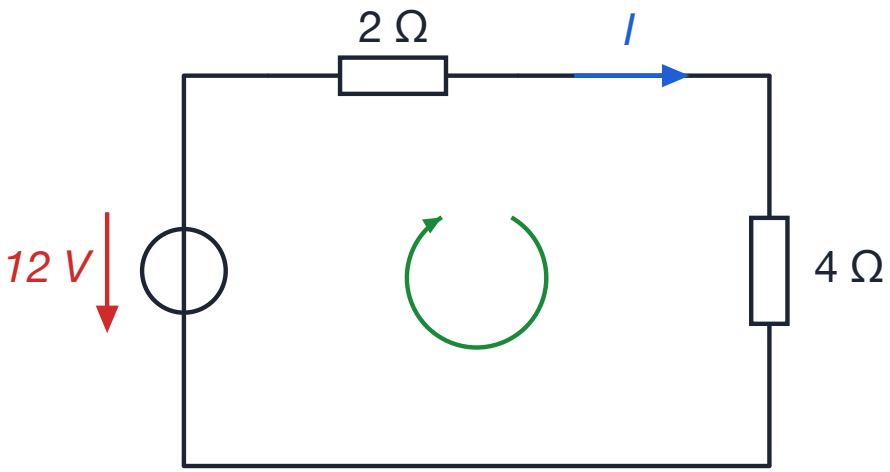
$$\sum_{k=1}^{n} U_k = 0$$

A felíráshoz először rögzítünk egy körüljárási irányt. Ami ezzel egyező irányú, pozitív, ami ellentétes, negatív előjelet kap. Az áram irányát is jelölni kell, mert az határozza meg az ellenállásokon eső feszültség irányát.

★ Az órán elhangzott: a huroktörvény ábráján az **áram iránya fontos**!

Példa a huroktörvényre

Egy példa: 12 voltos generátorra egy 2 és egy 4 ohmos ellenállás van sorban kötve. A huroktörvényből 12 egyenlő 2 I plusz 4 I, tehát I egyenlő 2 amper.



$$12\ \mathrm{V} = 2\ \Omega \cdot \mathrm{I} + 4\ \Omega \cdot \mathrm{I} \rightarrow \mathrm{I} = 2\ \mathrm{A}$$

A részfeszültségek: a 2 ohmoson 4 volt, a 4 ohmoson 8 volt esik. Összesen 12 volt, éppen a generátor feszültsége.

$$\mathrm{U_1} = 4\ \mathrm{V},\ \mathrm{U_2} = 8\ \mathrm{V},\ \mathrm{U_1} + \mathrm{U_2} = 12\ \mathrm{V}$$

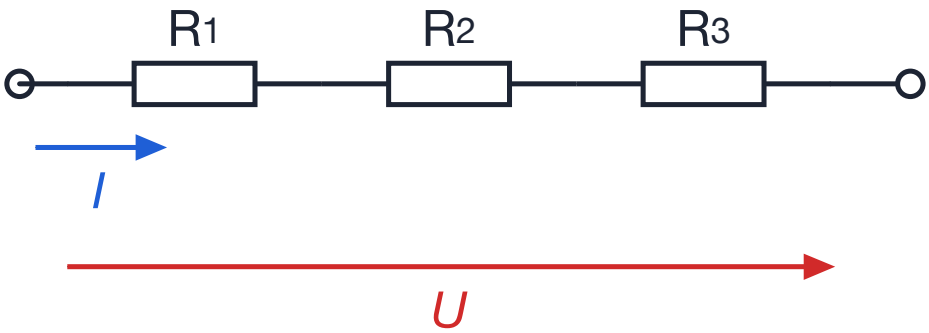
EZT JEGYEZD MEG!

- I. törvény: csomópontban $\Sigma \mathrm{I} = 0$.
- II. törvény: hurokban $\Sigma \mathrm{U} = 0$.

2.3 Soros és párhuzamos kapcsolás

Soros kapcsolás

Soros kapcsolásban az ellenállások egymás után, egy ágban vannak. Mindegyiken ugyanaz az áram folyik.



Sorosan: minden ellenálláson **ugyanaz az áram**.

A huroktörvény szerint a teljes feszültség a részfeszültségek összege. Mindegyik részfeszültség az áram és a saját ellenállás szorzata.

$$\mathrm{U} = \mathrm{I} \cdot \mathrm{R_1} + \mathrm{I} \cdot \mathrm{R_2} + \mathrm{I} \cdot \mathrm{R_3} = \mathrm{I} \cdot \mathrm{R_e}$$

Az árammal osztva megkapjuk az eredő ellenállást: soros kapcsolásban az ellenállások összeadódnak.

SOROS EREDŐ

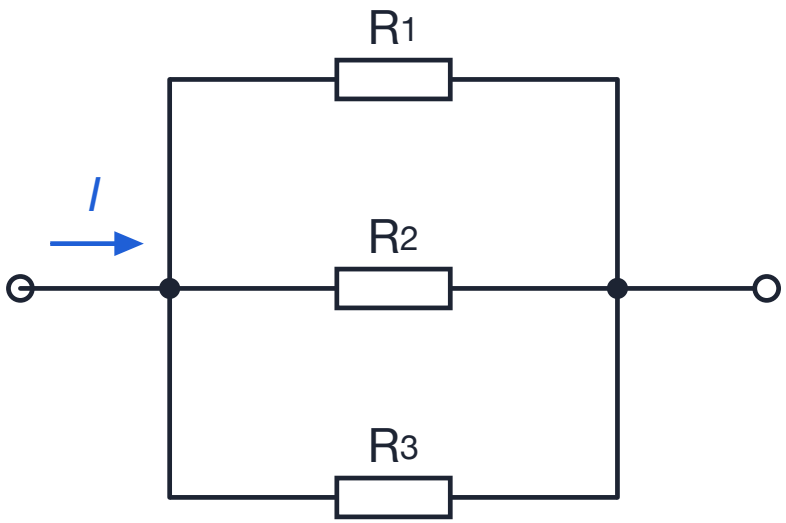
$$R_e = R_1 + R_2 + \ldots + R_n$$

Az eredő mindig nagyobb, mint a legnagyobb ellenállás.

> ℹ Soros eredő > a legnagyobb ellenállás.

Párhuzamos kapcsolás

Párhuzamos kapcsolásban az ellenállások ugyanarra a két pontra csatlakoznak, ezért mindegyiken ugyanaz a feszültség van.



Párhuzamosan: minden ellenálláson **ugyanaz a feszültség**.

A főág árama a mellékágak áramainak összege. Mindegyik ágáram a feszültség osztva a saját ellenállással.

$$I = \frac{U}{R_1} + \frac{U}{R_2} + \frac{U}{R_3} = \frac{U}{R_e}$$

A feszültséggel osztva: az eredő ellenállás reciproka az egyes ellenállások reciprokainak összege.

PÁRHUZAMOS EREDŐ

$$\frac{1}{R_e} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \ldots + \frac{1}{R_n}$$

Két ellenállásnál van egy kényelmes képlet: szorzat per összeg. Ezt replusz műveletnek is nevezzük.

REPLUSZ

$$R_1 \times R_2 = \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2}$$

⚠ Jelölése az előadás szerint: $R_1 \times R_2$ (ejtsd: R_1 replusz R_2) – ez itt nem szorzást jelent!

Példa és összefoglalás

A párhuzamos eredő mindig kisebb, mint a legkisebb ellenállás. Például 12, 12 és 6 ohm párhuzamosan: egy per eredő egyenlő 4 per 12, tehát az eredő 3 ohm.

$$\frac{1}{R_e} = \frac{1}{12} + \frac{1}{12} + \frac{1}{6} = \frac{4}{12} \rightarrow R_e = 3\ \Omega$$

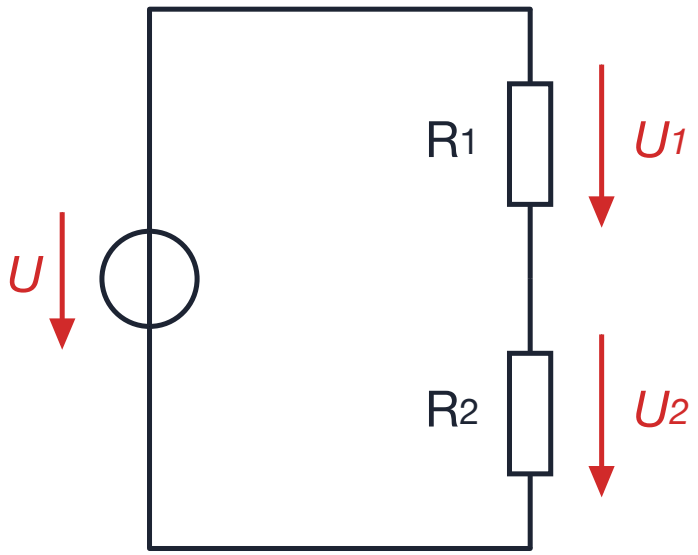
EZT JEGYEZD MEG!

- Soros: $R_e = \Sigma R_i$ (azonos áram).
- Párhuzamos: $1/R_e = \Sigma\ 1/R_i$ (azonos feszültség).
- Két ellenállás: szorzat per összeg.

2.4 Feszültségosztó és áramosztó

Feszültségosztó

A feszültségosztó két sorba kötött ellenállás. Az órán kiemelték, hogy ez fontos téma.



★ A feszültségosztó **FONTOS** – elméleti kérdés és feladatrész is lehet.

Mindkét ellenálláson ugyanaz az áram folyik: a teljes feszültség osztva a két ellenállás összegével.

$$I = \frac{U}{R_1 + R_2}$$

Az első ellenállás feszültsége ennek az áramnak és R1-nek a szorzata. Így kapjuk a feszültségosztó képletét.

FESZÜLTSÉGOSZTÓ

$$U_1 = U \cdot \frac{R_1}{R_1 + R_2}, \; U_2 = U \cdot \frac{R_2}{R_1 + R_2}$$

A lényeg: a részfeszültségek úgy aránylanak egymáshoz, mint az ellenállások. A nagyobb ellenálláson nagyobb feszültség esik.

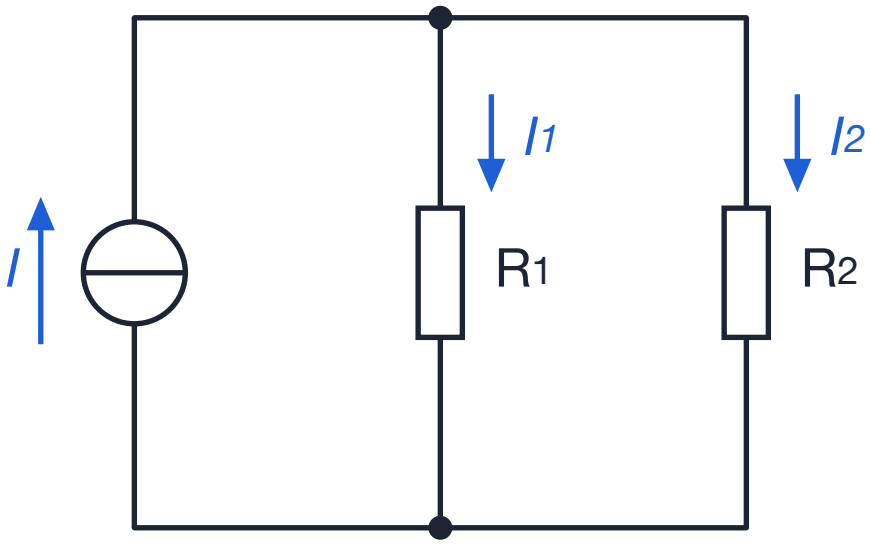
$$\frac{U_1}{U_2} = \frac{R_1}{R_2}$$

Példa: 12 voltot osztunk egy 2 és egy 4 ohmos ellenállással. A 4 ohmoson 12 szorozva 4 per 6, vagyis 8 volt esik.

$$U_2 = 12\ \mathrm{V} \cdot \frac{4\ \Omega}{2\ \Omega + 4\ \Omega} = 8\ \mathrm{V}$$

Áramosztó

Az áramosztó két párhuzamosan kötött ellenállás. A főág árama megoszlik a két ág között.



A közös feszültség: $U = I \cdot (R_1 \times R_2)$.

A közös feszültség az áram szorozva a két ellenállás repluszával. Ezt osztva az egyik ellenállással kapjuk az ágáramot.

$$I_1 = \frac{U}{R_1} = \frac{I}{R_1} \cdot \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$$

Egyszerűsítés után az áramosztó képlete: az egyik ág áramához a számlálóba a másik ág ellenállása kerül.

ÁRAMOSZTÓ

$$I_1 = I \cdot \frac{R_2}{R_1 + R_2},\ I_2 = I \cdot \frac{R_1}{R_1 + R_2}$$

Ez logikus: a párhuzamos ágak áramai fordítottan aránylanak az ellenállásokhoz. A kisebb ellenálláson folyik a nagyobb áram.

⚠ Áramosztó: a számlálóba a **másik** ág ellenállása kerül!

Példa: 6 amper oszlik meg egy 2 és egy 4 ohmos ellenállás között. A 2 ohmoson 6 szorozva 4 per 6, vagyis 4 amper folyik, a 4 ohmoson pedig 2 amper.

$$I_1 = 6\ \text{A} \cdot \frac{4}{2+4} = 4\ \text{A},\ I_2 = 6\ \text{A} \cdot \frac{2}{6} = 2\ \text{A}$$

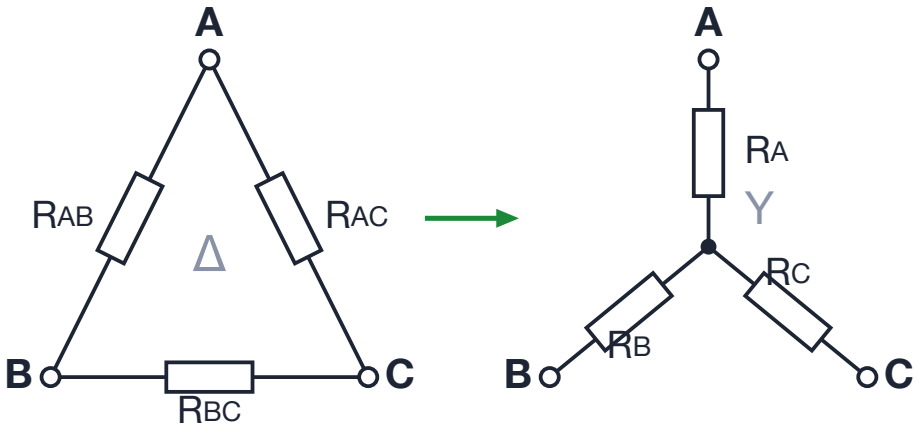
EZT JEGYEZD MEG!

- Feszültségosztó: saját R a számlálóban.
- Áramosztó: **másik** R a számlálóban.

2.5 Háromszög–csillag (Δ–Y) átalakítás

Mikor kell?

Vannak kapcsolások, amelyekben sem soros, sem párhuzamos részt nem találunk. Ilyenkor segít a háromszög–csillag átalakítás.



★ Az órán elhangzott: ebből csak **elméleti** kérdés lesz, gyakorlati feladat nem.

Három ellenállás háromszögbe kapcsolva helyettesíthető három, csillagba kapcsolt ellenállással úgy, hogy bármely két pont között ugyanaz az eredő ellenállás legyen.

Az A, B, C pontok között a két kapcsolás **egyenértékű**.

Az átszámítás képletei

A háromszögből csillagba: egy csillagág ellenállása a hozzá csatlakozó két háromszögoldal szorzata, osztva a három háromszögoldal összegével.

Δ → Y

$$R_A = \frac{R_{AB} \cdot R_{AC}}{\Sigma R}$$

A másik két ág ugyanígy, ciklikusan.

$$R_B = \frac{R_{AB} \cdot R_{BC}}{\Sigma R}, \; R_C = \frac{R_{AC} \cdot R_{BC}}{\Sigma R}$$

$$\Sigma R = R_{AB} + R_{BC} + R_{AC}$$

Visszafelé, csillagból háromszögbe, vezetésekkel érdemes számolni: egy háromszögoldal vezetése a két szomszédos csillagág vezetésének szorzata, osztva az összes vezetés összegével.

Y → Δ

$$G_{AB} = \frac{G_A \cdot G_B}{G_A + G_B + G_C}$$

Egyforma ellenállások

Ha mindhárom ellenállás egyforma, nagyon egyszerű: a csillag ellenállásai a háromszög ellenállásainak harmadai.

$$R_Y = \frac{R_\Delta}{3}$$

EZT JEGYEZD MEG!

- Δ → Y: két szomszédos oldal szorzata / a három oldal összege.
- Egyforma elemeknél $R_Y = R_\Delta / 3$.

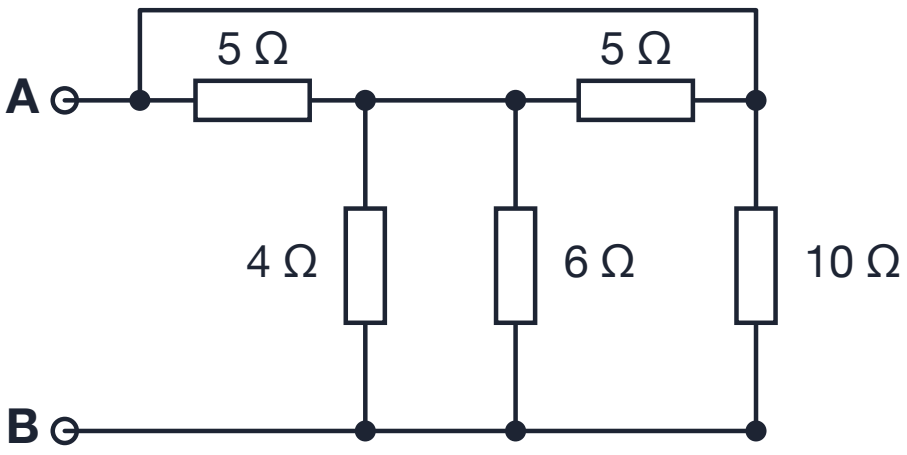
Képletkártya

Ohm törvénye	$U = R \cdot I,\ I = G \cdot U,\ G = \frac{1}{R}$
Kirchhoff I. (csomópont)	$\Sigma I_k = 0$
Kirchhoff II. (hurok)	$\Sigma U_k = 0$
Soros eredő	$R_e = R_1 + R_2 + \ldots + R_n$
Párhuzamos eredő	$\frac{1}{R_e} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \ldots + \frac{1}{R_n}$
Két párhuzamos ellenállás (replusz)	$R_1 \times R_2 = \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2}$
Feszültségosztó	$U_1 = U \cdot \frac{R_1}{R_1 + R_2},\ U_2 = U \cdot \frac{R_2}{R_1 + R_2}$
Áramosztó	$I_1 = I \cdot \frac{R_2}{R_1 + R_2},\ I_2 = I \cdot \frac{R_1}{R_1 + R_2}$
$\Delta \rightarrow Y$	$R_A = \frac{R_{AB} \cdot R_{AC}}{R_{AB} + R_{BC} + R_{AC}}$ (és ciklikusan)
DC teljesítmény	$P = U \cdot I = I^2 \cdot R = \frac{U^2}{R}$
Villamos munka	$W = U \cdot I \cdot t$

Mintafeladat: eredő ellenállás (1.) (Órai feladat (Példatár 1.4))

A feladat

Az órán az első zárthelyire készülve eredő ellenállást számoltunk. Határozzuk meg az ábrán látható hálózat eredő ellenállását az A és B pontok között!



Keresett: R_{AB}.

Tipp: keressünk olyan ellenállásokat, amelyek mindkét vége ugyanarra a két pontra csatlakozik.

> ℹ Ha két ellenállás mindkét vége ugyanazon a két ponton van, párhuzamosak – akkor is, ha a rajzon nem egymás mellett vannak.

Megoldás

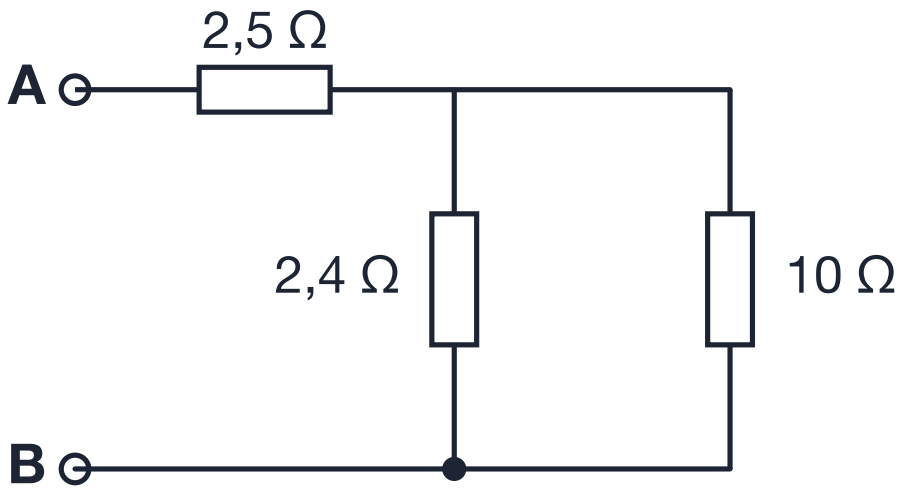
A felső vezeték az A pontot közvetlenül összeköti a jobb felső sarokkal. Így mindkét 5 ohmos ellenállás az A pont és a középső csomópont közé esik: párhuzamosak.

$$R_{55} = 5 \times 5 = \frac{5 \cdot 5}{5 + 5} = 2{,}5\ \Omega$$

A 4 és a 6 ohmos ellenállás a középső csomópont és a B pont között van, ezek is párhuzamosak.

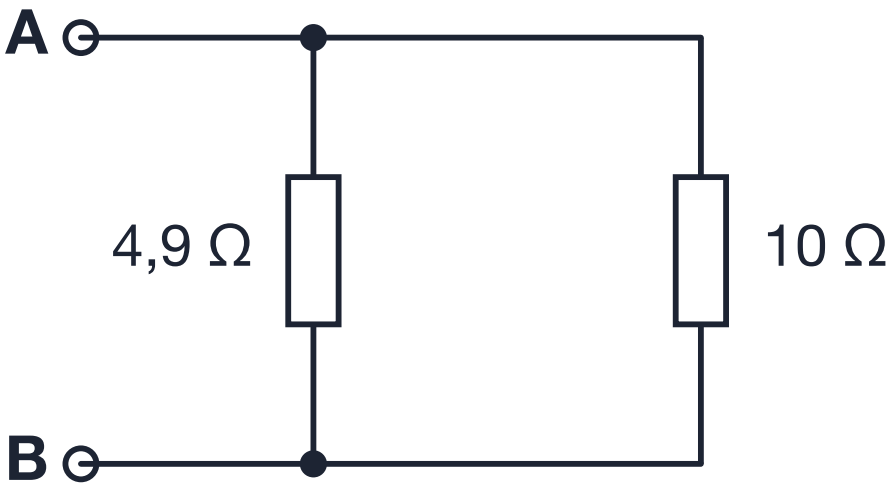
$$R_{46} = 4 \times 6 = \frac{4 \cdot 6}{4 + 6} = 2{,}4\ \Omega$$

A két eredő sorba kapcsolódik: 2,5 plusz 2,4, vagyis 4,9 ohm az A és B között.



$$R_{55} + R_{46} = 2{,}5\ \Omega + 2{,}4\ \Omega = 4{,}9\ \Omega$$

Ezzel párhuzamosan kapcsolódik a 10 ohmos ellenállás, mert az is a felső vezetéken keresztül az A és a B pont között van.



$$R_{AB} = 4{,}9 \times 10 = \frac{4{,}9 \cdot 10}{4{,}9 + 10} = \frac{49}{14{,}9}\ \Omega$$

Az eredmény 3,29 ohm.

EREDMÉNY $R_{AB} = 3{,}29\ \Omega$

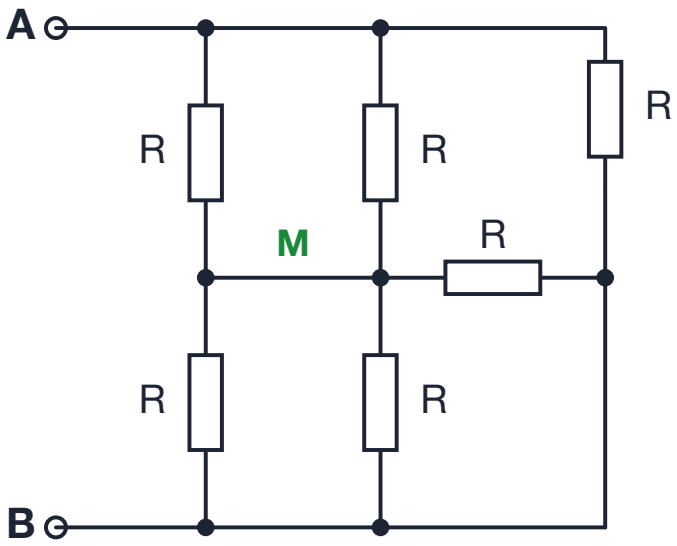
EZT JEGYEZD MEG!

- Keresd a közös csomópontokat – a vezeték „összehúzható”.
- Lépésenként vonj össze, és rajzold újra.

Mintafeladat: eredő ellenállás (2.) (Órai feladat (Példatár 1.3))

A feladat

Második feladat: minden ellenállás 50 ohm. Határozzuk meg az eredő ellenállást az A és B pontok között!



$R = 50\ \Omega$

Keresett: R_{AB}.

Itt érdemes a kapcsolást átrajzolni. Jelöljük M-mel a középső vízszintes vezetéket.

> ℹ Átrajzolás: keresd meg, melyik ellenállás melyik két csomópont között van (A, M, B).

Megoldás

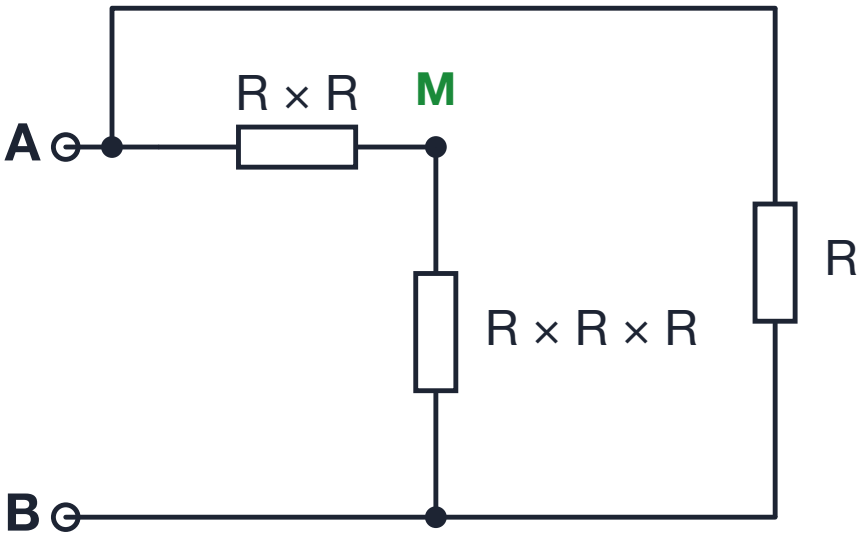
A felső két függőleges ellenállás az A és az M pont között van, tehát párhuzamosak: eredőjük 25 ohm.

$$R_{AM} = R \times R = \frac{50}{2} = 25\ \Omega$$

Az M pont és a B pont között három ellenállás van: a két alsó függőleges és a vízszintes, mert a jobb oldali függőleges vezeték a B ponthoz tartozik. Eredőjük 50 osztva hárommal, 16,67 ohm.

$$R_{MB} = R \times R \times R = \frac{50}{3} = 16{,}67\ \Omega$$

A jobb felső ellenállás közvetlenül az A és a B pont között van. Rajzoljuk át a kapcsolást!



Átrajzolva: (R_{AM} + R_{MB}) párhuzamosan a jobb oldali R-rel.

A 25 és a 16,67 ohm sorba kapcsolódik, ez 41,67 ohm. Ezzel párhuzamos az 50 ohm.

$$R_{AB} = (25 + 16{,}67) \times 50 = \frac{41{,}67 \cdot 50}{41{,}67 + 50}\ \Omega$$

Az eredmény 22,73 ohm.

EREDMÉNY $R_{AB} = 22{,}73\ \Omega$

EZT JEGYEZD MEG!

- n darab egyforma R párhuzamosan: R/n.
- Átrajzolás után a soros–párhuzamos részek jól látszanak.

3. Hálózatszámítási tételek

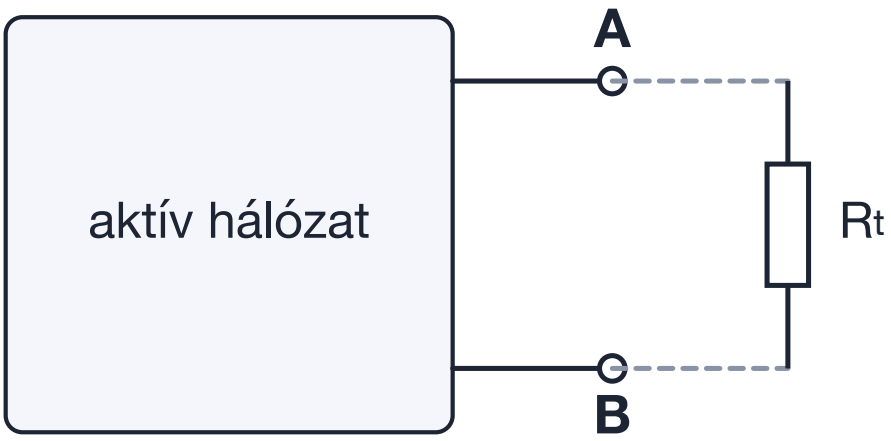
3.1 Mi az a kétpólus, és miért jó helyettesíteni?

A kétpólus

Ebben a modulban olyan módszereket tanulunk, amelyekkel egy bonyolult hálózatot gyorsan ki lehet számolni.

Cél: bonyolult hálózat → egyszerű helyettesítő kép

Képzelj el egy dobozt, amelyben ellenállások és generátorok vannak. A dobozból csak két kivezetés lóg ki: A és B.



> **Kétpólus** – olyan hálózat, amelynek csak két kivezetését (A és B pont) használjuk.

Ha ez a doboz generátort is tartalmaz, aktív kétpólusnak nevezzük. Az A és B pontra kötjük a terhelést, az Rt ellenállást.

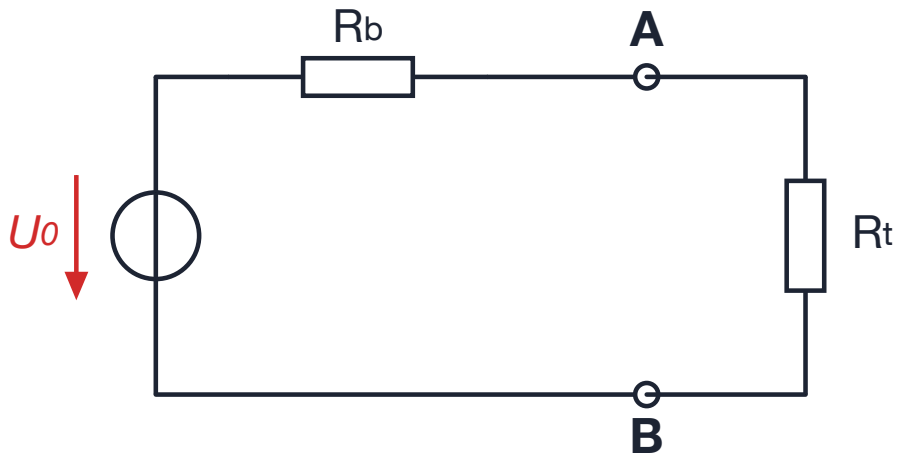
- **Aktív** kétpólus: van benne generátor.
- **Passzív** kétpólus: csak ellenállások vannak benne.
- R_t: a terhelő ellenállás.

A terhelés szempontjából mindegy, mi van a dobozban. Csak az számít, hogy a két kivezetésen milyen feszültség és áram jelenik meg.

> ℹ A terhelés „nem látja”, mi van a dobozban – csak az A–B kapcsokat érzékeli.

Két lehetséges helyettesítés

Ezért a dobozt lecserélhetjük egy sokkal egyszerűbb kapcsolásra, amely a terhelés felé pontosan ugyanúgy viselkedik.

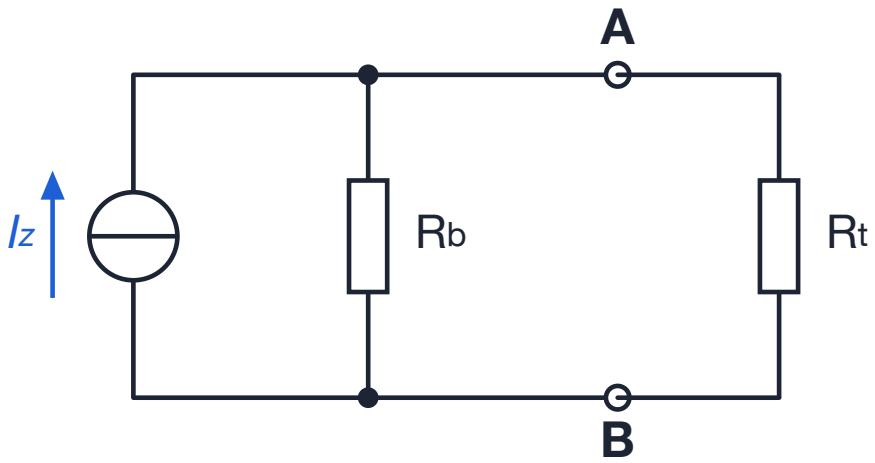


THÉVENIN-HELYETTESÍTÉS

ideális feszültséggenerátor + soros ellenállás

Az egyik lehetőség egy ideális feszültséggenerátor és vele sorban egy belső ellenállás. Ez a Thévenin-helyettesítés.

A másik lehetőség egy ideális áramgenerátor és vele párhuzamosan egy belső ellenállás. Ez a Norton-helyettesítés.



NORTON-HELYETTESÍTÉS

ideális áramgenerátor + párhuzamos ellenállás

Mindkettő előnye ugyanaz: ha a terhelést kicseréljük, nem kell az egész hálózatot újra kiszámolni, csak egyetlen egyszerű kört.

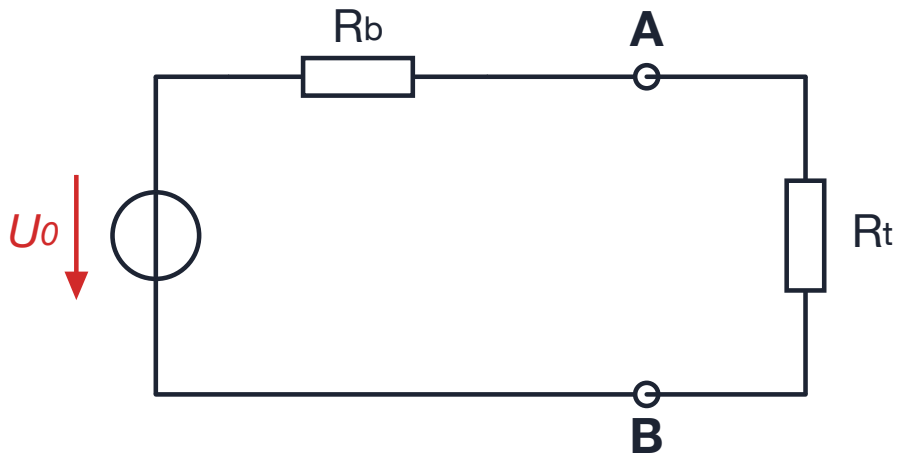
EZT JEGYEZD MEG!

- A kétpólust a terhelés felől nézve helyettesítjük.
- Thévenin: **feszültség**generátor + **soros** R_b.
- Norton: **áram**generátor + **párhuzamos** R_b.

3.2 Thévenin-tétel lépésről lépésre

A Thévenin-tétel

A Thévenin-tétel szerint bármilyen bonyolult, aktív kétpólus helyettesíthető egy ideális feszültséggenerátorral és egy vele sorba kötött belső ellenállással.



> **Thévenin-tétel** – a kétpólus helyettesíthető egy U_0 forrásfeszültségű ideális feszültséggenerátorral és egy soros R_b belső ellenállással.

A generátor feszültsége az eredeti kétpólus üresjárási feszültsége. Üresjárás azt jelenti, hogy az A és B pont közé nem kötünk semmit.

1. LÉPÉS: ÜRESJÁRÁSI FESZÜLTSÉG

$$U_0 = U_{AB} \text{ (A–B között nincs terhelés)}$$

A belső ellenállás az A és B pont között mérhető ellenállás, amikor a generátorokat kiiktatjuk.

2. LÉPÉS: BELSŐ ELLENÁLLÁS

$$R_b = R_{AB} \text{ (generátorok kiiktatva)}$$

Kiiktatáskor a feszültséggenerátort rövidzárral, az áramgenerátort szakadással helyettesítjük. Ezt jól jegyezd meg, mert gyakori hiba!

⚠ Feszültséggenerátor → **rövidzár** (vezeték). Áramgenerátor → **szakadás** (kivesszük).

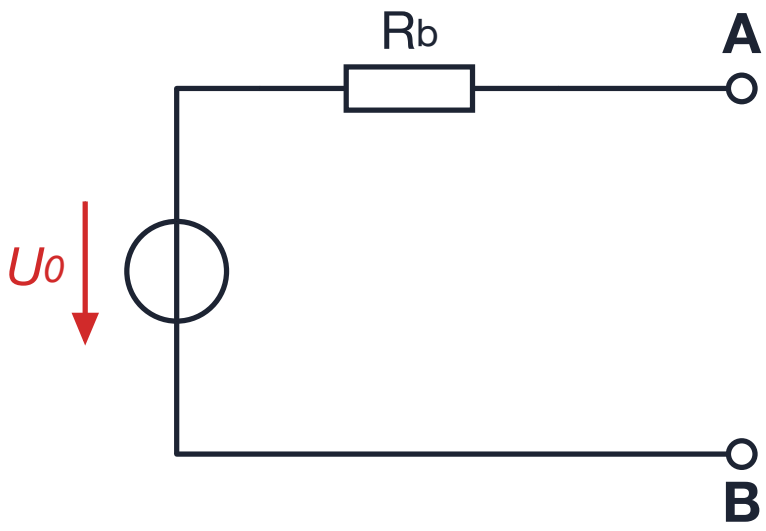
Végül a terhelő áramot egyetlen egyszerű körből, Ohm törvényével számoljuk.

3. LÉPÉS: TERHELŐ ÁRAM

$$I_t = \frac{U_0}{R_b + R_t}$$

Miért éppen így?

Hogy miért pont így? Ha az A és B pont szabadon van, a helyettesítő képen sem folyik áram, így a belső ellenálláson nem esik feszültség. Ilyenkor a kapcsokon éppen a generátor feszültsége jelenik meg.



Üresjárásban I = 0, ezért R_b-n nincs feszültségesés:

$$U_{AB} = U_0$$

Ha pedig a generátorokat kiiktatjuk, a helyettesítő képből csak a belső ellenállás marad. Ezt kell az eredeti hálózatban is kimérnünk az A és B pont között.

Generátorok kiiktatva csak R_b marad:

$$R_{AB} = R_b$$

Összefoglalva: két dolgot kell kiszámolni, az üresjárási feszültséget és a belső ellenállást. Ennyi a Thévenin-tétel lényege.

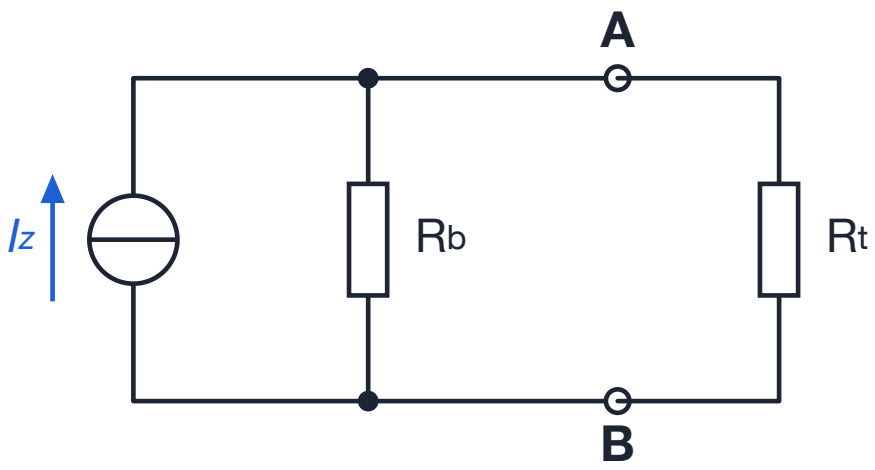
EZT JEGYEZD MEG!

- U_0: A–B feszültség terhelés **nélkül**.
- R_b: A–B ellenállás, a generátorokat kiiktatva.
- $I_t = U_0 / (R_b + R_t)$

3.3 Norton-tétel – és kapcsolata Théveninnel

A Norton-tétel

A Norton-tétel ugyanazt a kétpólust egy ideális áramgenerátorral és egy vele párhuzamos belső ellenállással helyettesíti.



> **Norton-tétel** – a kétpólus helyettesíthető egy I_z forrásáramú ideális áramgenerátorral és egy párhuzamos $G_b = 1/R_b$ belső vezetéssel.

Az áramgenerátor árama a kétpólus rövidzárási árama. Ehhez az A és B pontot képzeletben egy vezetékkel összekötjük, és kiszámoljuk a vezetéken folyó áramot.

1. LÉPÉS: RÖVIDZÁRÁSI ÁRAM

$$I_z = I_{AB} \text{ (A–B rövidre zárva)}$$

A belső ellenállás ugyanaz, mint Théveninnél: a generátorokat kiiktatjuk, és az A, B pontok közötti ellenállást számoljuk. Norton-képben ezt gyakran vezetésként adjuk meg.

2. LÉPÉS: BELSŐ ELLENÁLLÁS

$$R_b = R_{AB},\ G_b = \frac{1}{R_b}$$

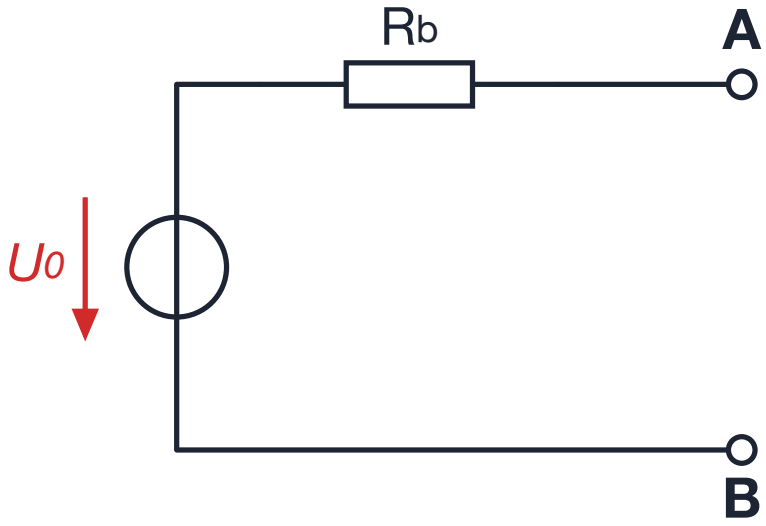
A terhelő áramot áramosztóval kapjuk: a rövidzárási áram megoszlik a belső ellenállás és a terhelés között.

3. LÉPÉS: ÁRAMOSZTÓ

$$I_t = I_z \cdot \frac{R_b}{R_b + R_t}$$

Thévenin ↔ Norton

A két helyettesítés ugyanazt a kétpólust írja le, ezért át lehet váltani egyikből a másikba.



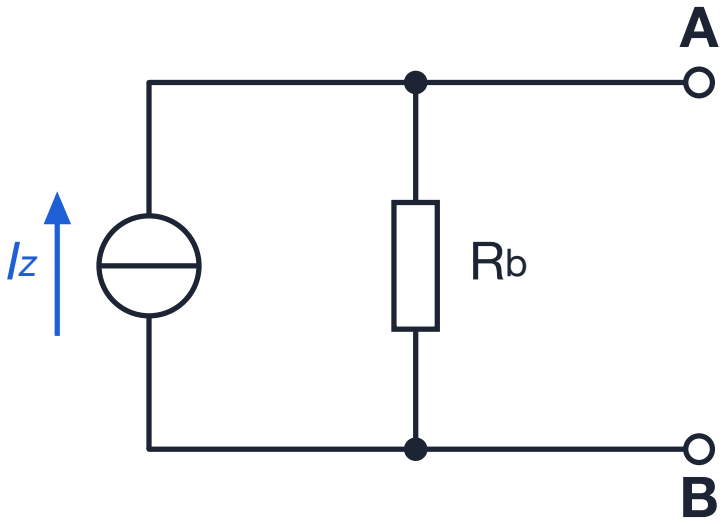
Ugyanaz a kétpólus – két alakban.

Zárjuk rövidre a Thévenin-kép kapcsait! Ekkor a rövidzárban folyó áram a forrásfeszültség és a belső ellenállás hányadosa. Ez éppen a Norton-áram.

ÁTVÁLTÁS

$$I_z = \frac{U_0}{R_b}$$

Visszafelé is működik: az üresjárási feszültség a Norton-áram és a belső ellenállás szorzata.



$$U_0 = I_z \cdot R_b$$

Ezt ellenőrzésre is használhatod: ha Théveninnel és Nortonnal is megoldod a feladatot, ugyanannak a terhelő áramnak kell kijönnie.

EZT JEGYEZD MEG!

- Norton: **rövidzárási** áram + párhuzamos R_b.
- R_b mindkét tételnél ugyanaz.
- $I_z = U_0 / R_b$ – így ellenőrizheted magad.

3.4 Szuperpozíció: generátorok egyenként

A szuperpozíció tétele

Ha egy hálózatban több generátor van, a szuperpozíció tétele nagy segítség.

> **Szuperpozíció tétele** – több generátor esetén minden generátor a többitől függetlenül hozza létre a maga részáramát; az ág árama a részáramok előjeles összege.

A módszer: egyszerre mindig csak egy generátort hagyunk bekapcsolva. A többit kiiktatjuk, vagyis a belső ellenállásukkal helyettesítjük.

1. Kiválasztunk **egy** generátort, a többit kiiktatjuk.
2. Kiszámoljuk a keresett ág részáramát.
3. Megismételjük minden generátorra.
4. A részáramokat **előjelesen** összeadjuk.

A generátorok kiiktatása

Ismét a szabály: a feszültséggenerátort rövidzárral, az áramgenerátort szakadással helyettesítjük.

⚠ Ideális feszültséggenerátor belső ellenállása 0 → **rövidzár**. Ideális áramgenerátor belső ellenállása végtelen → **szakadás**.

Az összeadásnál figyelj az irányokra: ha egy részáram a bejelölt iránnyal egyezik, pozitív, ha ellentétes, negatív előjellel számít.

ÖSSZEGZÉS

$$I = I' + I'' + \dots \text{ (előjelesen)}$$

A szuperpozíció csak lineáris hálózatban érvényes, vagyis ahol az ellenállások értéke nem függ az áramtól. Ellenállásokból és generátorokból álló hálózatban ez mindig teljesül.

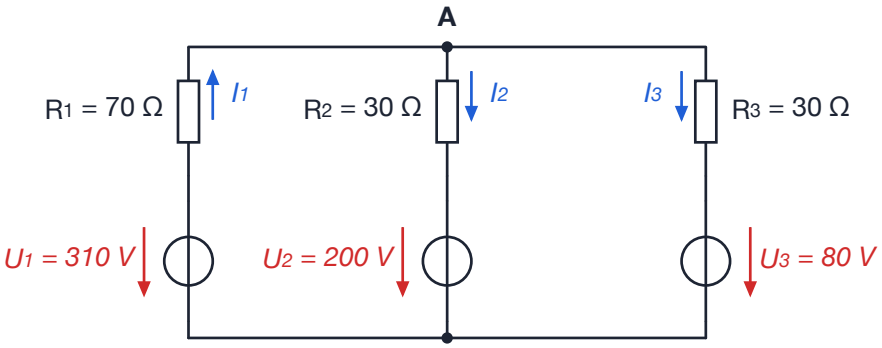
EZT JEGYEZD MEG!

- Egyszerre egy generátor dolgozik.
- Feszültséggenerátor → rövidzár, áramgenerátor → szakadás.
- Részáramok előjeles összege adja az eredményt.

3.5 Hurokáramok és csomóponti potenciálok röviden

Két általános módszer

Van két általános módszer is, amely bármilyen hálózatra működik. Nézzük meg őket egy egyszerű, három ágú példán az előadásból.



$U_1 = 310\ \text{V}$ $U_2 = 200\ \text{V}$ $U_3 = 80\ \text{V}$ $R_1 = 70\ \Omega$ $R_2 = R_3 = 30\ \Omega$

Csomóponti potenciálok módszere: a lenti vezetéket nulla potenciálúnak vesszük, és az A pont potenciálja lesz az egyetlen ismeretlen.

CSOMÓPONTI EGYENLET (A PONT)

$$\frac{U_1 - U_A}{R_1} = \frac{U_A - U_2}{R_2} + \frac{U_A - U_3}{R_3}$$

Ez Kirchhoff első törvénye az A pontra: a befolyó áram egyenlő a kifolyó áramok összegével.

Megoldva az A pont potenciálja 170 volt.

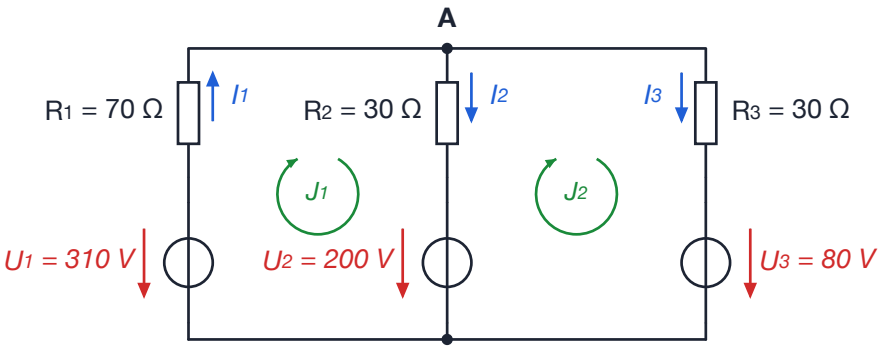
EREDMÉNY $U_A = 170\ V$

Ebből minden áram Ohm törvényével jön: az első ág árama 2 amper, a másodiké mínusz 1 amper, a harmadiké 3 amper. A negatív előjel azt jelenti, hogy az áram a bejelölttel ellentétes irányú.

$$I_1 = \frac{310-170}{70} = 2\ A,\ I_2 = \frac{170-200}{30} = -1\ A,\ I_3 = \frac{170-80}{30} = 3\ A$$

Hurokáramok módszere

A hurokáramok módszerénél minden ablakhoz egy körbefolyó, úgynevezett hurokáramot rendelünk. Itt kettő van: J1 és J2.



Minden ablakra egy huroktörvény (Kirchhoff II.):

Mindkét hurokra felírjuk a huroktörvényt. A középső ellenálláson a két hurokáram különbsége folyik, ezért ott mindkettő szerepel.

$$J_1(R_1 + R_2) - J_2\,R_2 = U_1 - U_2$$

$$-J_1\,R_2 + J_2(R_2 + R_3) = U_2 - U_3$$

Számokkal: száz J1 mínusz harminc J2 egyenlő száztíz, és mínusz harminc J1 plusz hatvan J2 egyenlő százhúsz. A megoldás J1 egyenlő 2 amper, J2 egyenlő 3 amper.

$$100\,J_1 - 30\,J_2 = 110$$

$$-30\,J_1 + 60\,J_2 = 120$$

EREDMÉNY $J_1 = 2\ A,\ J_2 = 3\ A$

Ágáramok a hurokáramokból

Az ágáramok: I1 egyenlő J1, I3 egyenlő J2, a középső ág árama pedig a kettő különbsége, mínusz 1 amper. Ugyanaz jött ki, mint az előbb.

$$I_2 = J_1 - J_2 = -1\ \text{A}$$

EZT JEGYEZD MEG!

- Csomóponti potenciál: ismeretlen a csomópont **feszültsége**.
- Hurokáramok: ismeretlen a körbefolyó **hurokáram**.
- Ugyanazt a feladatot több módszerrel is megoldhatod – az eredmény ugyanaz.

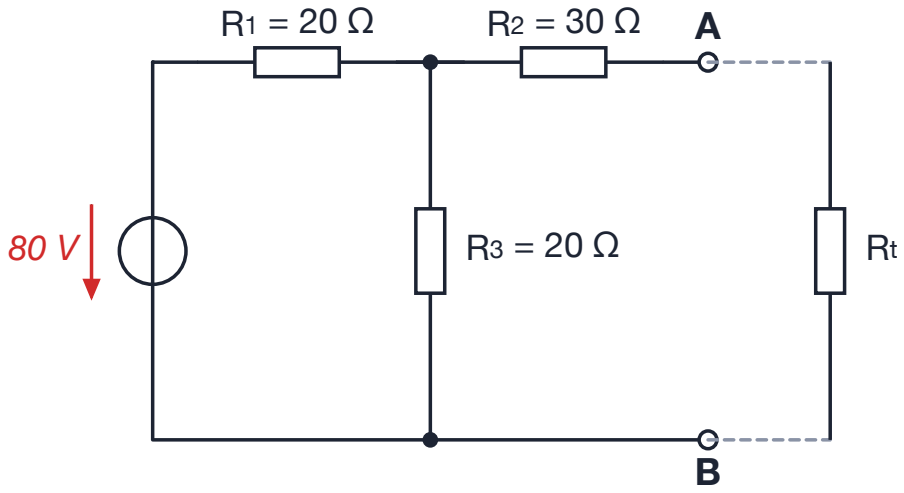
Képletkártya

Thévenin-generátor	$U_0 = U_{AB}$ (üresjárásban), $R_b = R_{AB}$ (generátorok kiiktatva)
Terhelő áram (Thévenin)	$I_t = \frac{U_0}{R_b + R_t}$
Norton-generátor	$I_z = I_{AB}$ (rövidzárban), $G_b = \frac{1}{R_b}$
Terhelő áram (Norton)	$I_t = I_z \cdot \frac{R_b}{R_b + R_t}$
Kapcsolat a kettő között	$I_z = \frac{U_0}{R_b}$
Generátor kiiktatása	feszültséggenerátor → rövidzár, áramgenerátor → szakadás
Szuperpozíció	$I = I' + I'' + \ldots$ (előjelesen)

Mintafeladat: Thévenin-helyettesítés (Példatár 2.1)

A feladat

Az első mintafeladat a példatár 2.1-es feladata. Helyettesítsük az A–B pontok közötti kétpólust a legegyszerűbb, vele egyenértékű kétpólussal!



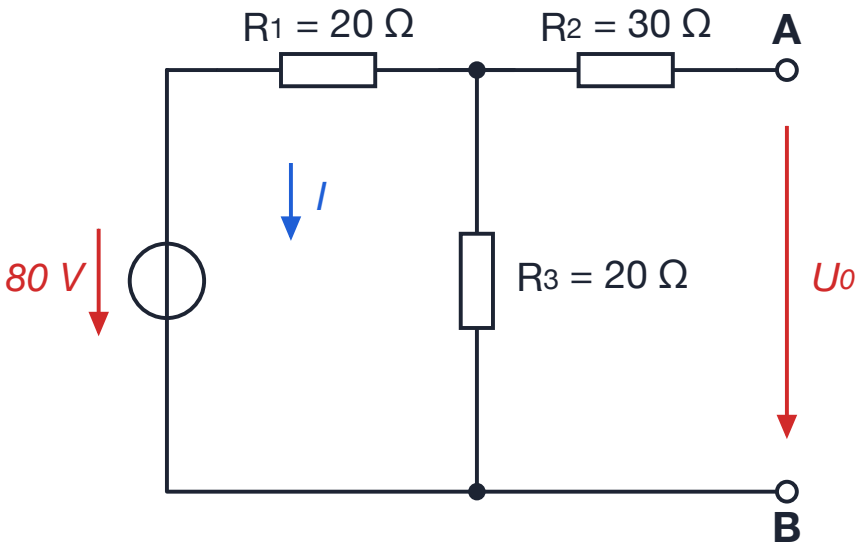
$U = 80\ V$ $R_1 = 20\ \Omega$ $R_2 = 30\ \Omega$ $R_3 = 20\ \Omega$

Vagyis meg kell határozni a Thévenin-helyettesítő kép két adatát: az üresjárási feszültséget és a belső ellenállást.

Keresett: U_0 és R_b, majd a terhelő áram képlete.

1. lépés: üresjárási feszültség

Először a terhelést elhagyjuk. Ekkor az R2 ellenálláson nem folyik áram, így rajta nem esik feszültség.



R_t nélkül R_2-n nem folyik áram, ezért U_0 megegyezik R_3 feszültségével.

A generátor árama így csak az R1 és R3 soros körön folyik. Ez 80 volt osztva negyven ohmmal, vagyis 2 amper.

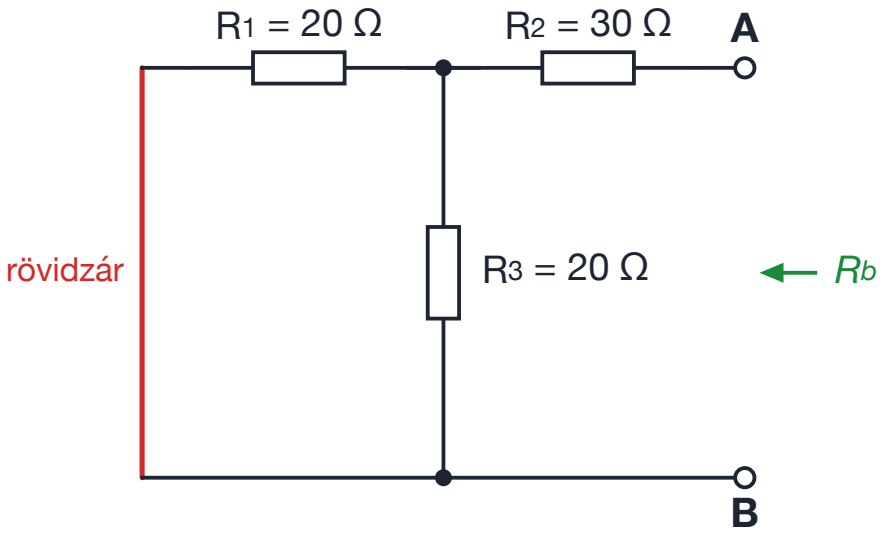
$$I = \frac{U}{R_1 + R_3} = \frac{80\ V}{20\ \Omega + 20\ \Omega} = 2\ A$$

Az üresjárási feszültség az R3 ellenállás feszültsége: 2 amper szorozva 20 ohmmal, azaz 40 volt.

EREDMÉNY $U_0 = I \cdot R_3 = 2\ A \cdot 20\ \Omega = 40\ V$

2. lépés: belső ellenállás

Most kiiktatjuk a generátort. Feszültséggenerátorról van szó, ezért rövidzárral helyettesítjük.



A 80 V-os generátor helyére rövidzár kerül.

Az A–B pontok felől nézve az R1 és az R3 párhuzamosan kapcsolódik, és ezzel sorban van az R2.

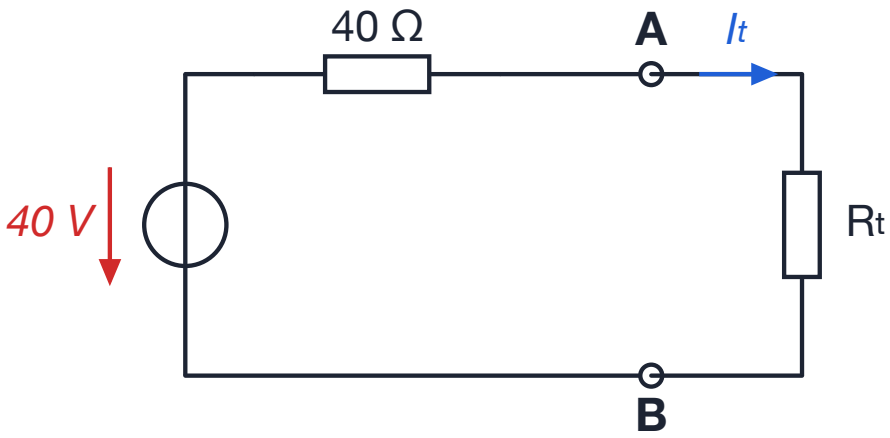
$$R_b = R_2 + R_1 \times R_3 = 30\ \Omega + \frac{20 \cdot 20}{20 + 20}\ \Omega$$

Húsz replusz húsz az tíz ohm, plusz harminc ohm, az összesen 40 ohm.

EREDMÉNY $R_b = 30\ \Omega + 10\ \Omega = 40\ \Omega$

Eredmény

A kétpólus tehát egy 40 voltos ideális feszültséggenerátorral és egy vele sorba kötött 40 ohmos ellenállással helyettesíthető.



TERHELŐ ÁRAM

$$I_t = \frac{U_0}{R_b + R_t} = \frac{40\ V}{40\ \Omega + R_t}$$

Bármilyen terhelést kötünk rá, az áramát ebből a képletből azonnal megkapjuk. Például 40 ohmos terhelésnél az áram 0,5 amper.

$$R_t = 40\ \Omega \rightarrow I_t = \frac{40\ V}{80\ \Omega} = 0{,}5\ A$$

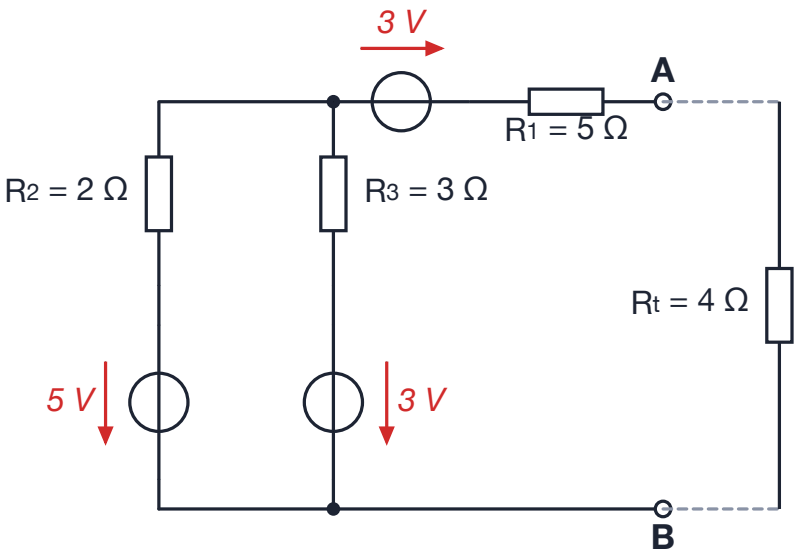
EZT JEGYEZD MEG!

- Üresjárásban az R_2-n nincs áram.
- Feszültséggenerátor kiiktatása: rövidzár.
- Eredmény: $U_0 = 40$ V, $R_b = 40\ \Omega$.

Mintafeladat: Thévenin és Norton ($R_t = 4\ \Omega$) (Órai feladat (Példatár 2.3))

A feladat

Ezt a feladatot órán oldottuk meg. Három feszültséggenerátor és három ellenállás van benne. Az A–B pontok közé egy 4 ohmos terhelést kötünk.



$R_1 = 5\ \Omega$ $R_2 = 2\ \Omega$ $R_3 = 3\ \Omega$ $U_{g1} = 5\ V$ $U_{g2} = U_{g3} = 3\ V$

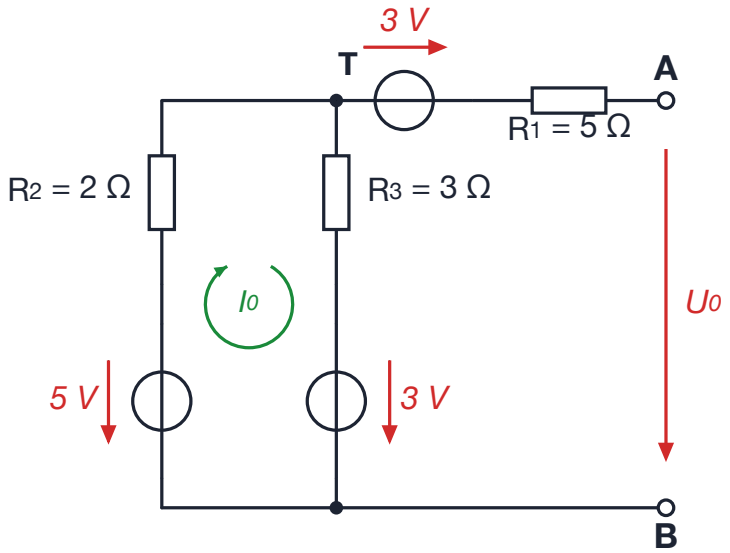
$R_t = 4\ \Omega$

Számoljuk ki a terhelő ellenállás áramát előbb Thévenin-tétellel, majd Norton-tétellel!

Keresett: I_t (Thévenin és Norton tétellel is).

Thévenin – 1. lépés: üresjárási feszültség

Vegyük le a terhelést. Ekkor az R1 ellenálláson nem folyik áram. Áram csak a bal oldali körben folyik, a két függőleges ágon keresztül. Jelöljük ezt I0-val.



Terhelés nélkül csak a bal oldali körben folyik áram (I_0).

A huroktörvény erre a körre: az 5 voltos generátor feszültsége, mínusz a 3 voltos generátor, egyenlő a két ellenálláson eső feszültséggel.

$$5\ \text{V} - 3\ \text{V} = I_0 \cdot (2\ \Omega + 3\ \Omega) \rightarrow I_0 = 0{,}4\ \text{A}$$

A T pont potenciálja a bal ágon számolva: 5 volt mínusz 2 ohm szorozva 0,4 amperrel, vagyis 4,2 volt.

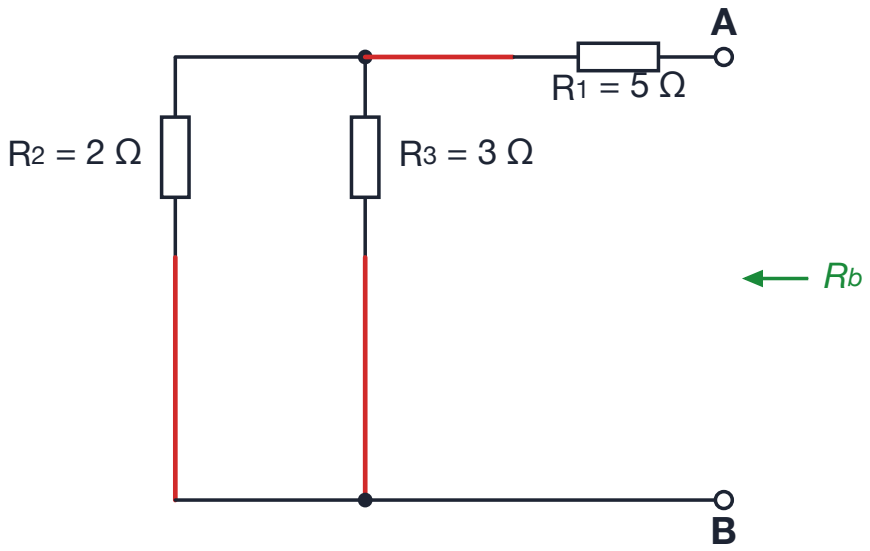
$$U_T = 5\ \text{V} - 2\ \Omega \cdot 0{,}4\ \text{A} = 4{,}2\ \text{V}$$

A T ponttól az A pontig a felső, 3 voltos generátoron megyünk át, a pozitív sarkától a negatív felé. Ez 3 volt csökkenés. Az R1-en nincs feszültség, mert nem folyik áram.

EREDMÉNY $U_0 = U_T - 3\ \text{V} = 4{,}2\ \text{V} - 3\ \text{V} = 1{,}2\ \text{V}$

Thévenin – 2. lépés: belső ellenállás

Most minden feszültséggenerátort rövidzárral helyettesítünk.



Mindhárom generátor helyére rövidzár kerül.

A–B felől nézve: a 2 és a 3 ohmos ellenállás párhuzamos, ehhez sorosan kapcsolódik az 5 ohmos.

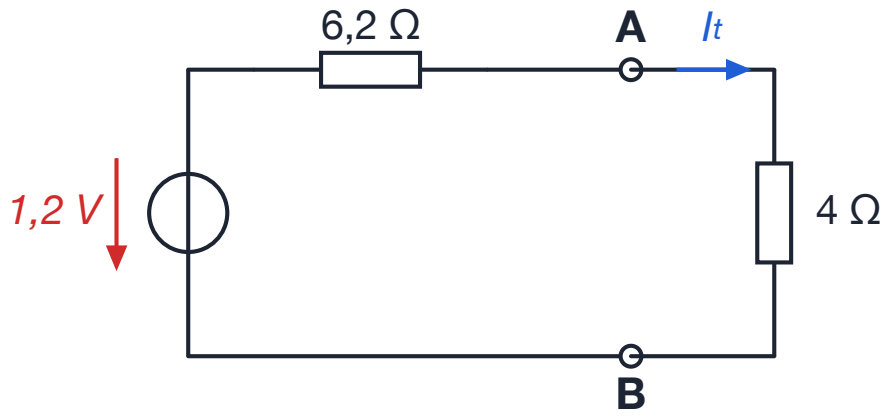
$$R_b = R_2 \times R_3 + R_1 = \frac{2 \cdot 3}{2 + 3}\ \Omega + 5\ \Omega$$

Két replusz három az 1,2 ohm, plusz 5 ohm, összesen 6,2 ohm.

EREDMÉNY $R_b = 1{,}2\ \Omega + 5\ \Omega = 6{,}2\ \Omega$

Thévenin – 3. lépés: terhelő áram

A helyettesítő kép egy 1,2 voltos generátor 6,2 ohmos belső ellenállással. Erre kötjük rá a 4 ohmos terhelést.



$$I_t = \frac{U_0}{R_b + R_t} = \frac{1{,}2\ \text{V}}{6{,}2\ \Omega + 4\ \Omega}$$

Az áram 1,2 volt osztva 10,2 ohmmal, ami 0,1176 amper, vagyis 117,6 milliamper.

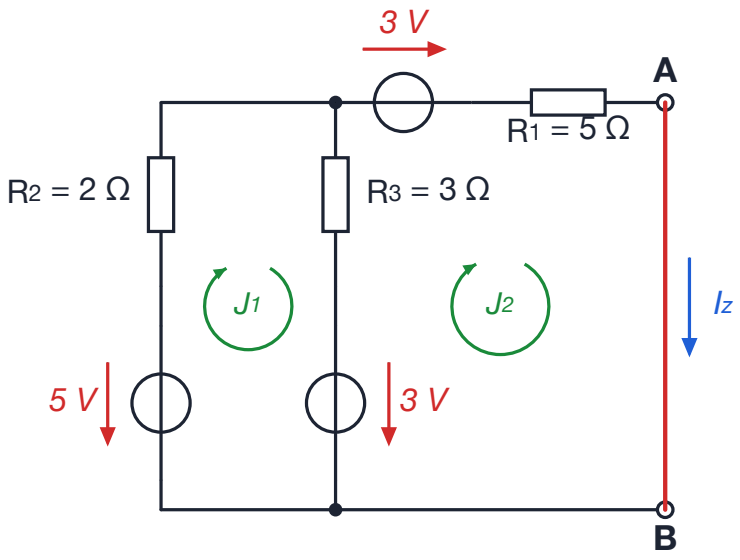
EREDMÉNY $I_t = 0{,}1176\ \text{A} = 117{,}6\ \text{mA}$

Figyelem: az órai jegyzetben itt elírás szerepel: a nevező 10,4, az eredmény 17,6 milliamper. Valójában 6,2 plusz 4 egyenlő 10,2, és a helyes érték 117,6 milliamper. A Norton-tétel is pontosan ezt adja, ahogy mindjárt látni fogjuk.

✎ Az órai jegyzetben „1,2 / 10,4” és „0,176 A = 17,6 mA” áll – ez elírás: 6,2 + 4 = 10,2, és 1,2 / 10,2 = 0,1176 A = **117,6 mA**. A Norton-tétel ugyanezt adja (6/31 · 6,2/10,2 = 0,1176 A), ez igazolja az eredményt.

Norton – rövidzárási áram

Most ugyanezt Norton-tétellel. Ehhez az A és B pontot rövidre zárjuk, és kiszámoljuk a rövidzárban folyó áramot. Két ablakunk van, ezért hurokáramokat használunk.



A–B rövidre zárva; két hurokáram: J_1 (bal) és J_2 (jobb). A rövidzár árama $I_z = J_2$.

A bal hurokra: öt J1 mínusz három J2 egyenlő 2 volt. A jobb hurokra: mínusz három J1 plusz nyolc J2 egyenlő nulla.

$$5\,J_1 - 3\,J_2 = 2$$

$$-3\,J_1 + 8\,J_2 = 0$$

Determinánsokkal: a rendszer determinánsa 5-ször 8 mínusz 3-szor 3, vagyis 31. A J2-höz tartozó determináns 6.

$$D = 5\cdot 8 - (-3)\cdot(-3) = 31,\ D_2 = 5\cdot 0 - 2\cdot(-3) = 6$$

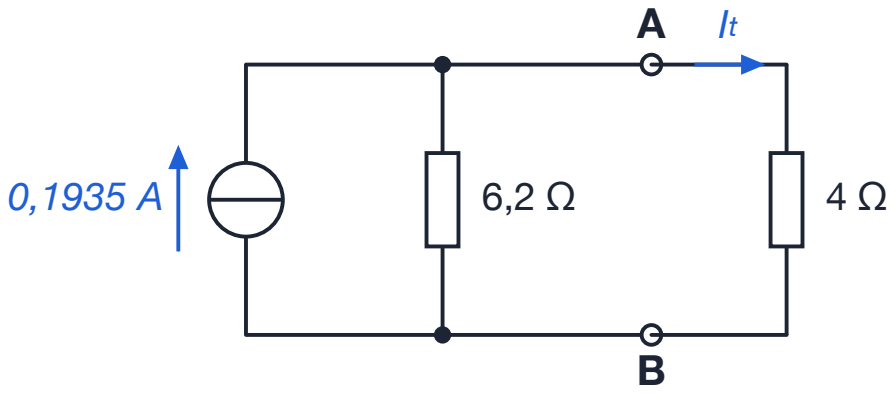
Így a rövidzárási áram 6 osztva 31-gyel, 0,1935 amper. Ellenőrzés: 1,2 volt osztva 6,2 ohmmal szintén 0,1935 amper.

EREDMÉNY $I_z = J_2 = \frac{6}{31}\ \text{A} = 0{,}1935\ \text{A}$

ellenőrzés: $\frac{U_0}{R_b} = \frac{1{,}2}{6{,}2} = 0{,}1935\ \text{A}$

Norton – terhelő áram

A Norton-kép: egy 0,1935 amperes áramgenerátor, vele párhuzamosan a 6,2 ohmos belső ellenállás, és erre kötjük a terhelést.



$$I_t = I_z \cdot \frac{R_b}{R_b + R_t} = 0{,}1935\ \text{A} \cdot \frac{6{,}2}{10{,}2}$$

Áramosztóval az eredmény ismét 0,1176 amper. A két tétel ugyanazt adta, tehát a megoldás jó.

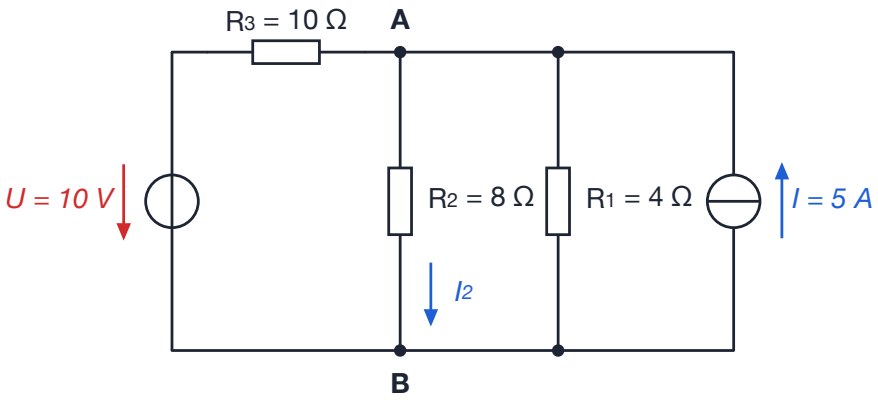
EZT JEGYEZD MEG!

- Thévenin: $U_0 = 1{,}2$ V, $R_b = 6{,}2\ \Omega$.
- Norton: $I_z = 0{,}1935$ A, ugyanaz az R_b.
- Mindkettőből $I_t = 117{,}6$ mA.

Mintafeladat: szuperpozíció (Órai feladat (Példatár 2.4))

A feladat

Ez a feladat is órai feladat volt, és tipikus ZH-feladat. Határozzuk meg a szuperpozíció tételével az R2 ellenállás I2 áramát!



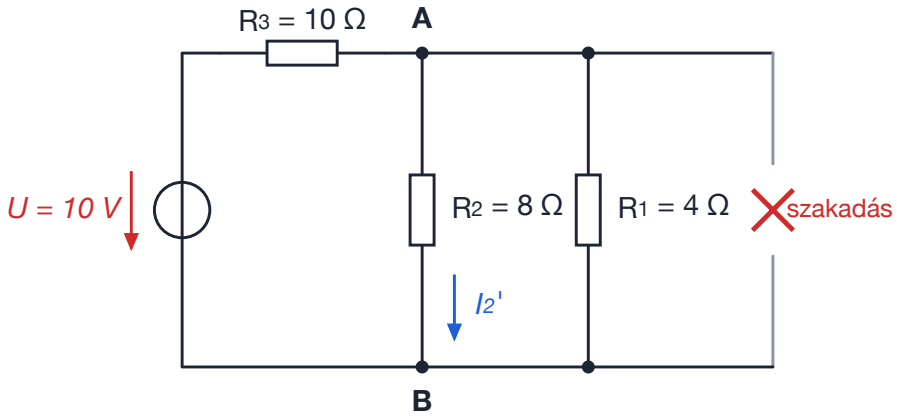
$U = 10\ V$ $I = 5\ A$ $R_1 = 4\ \Omega$ $R_2 = 8\ \Omega$ $R_3 = 10\ \Omega$

Két generátor van: egy 10 voltos feszültséggenerátor és egy 5 amperes áramgenerátor. Mindkettő hatását külön számoljuk.

Keresett: I_2. Két generátor → két részáram: I_2' és I_2''.

a) Csak a feszültséggenerátor: I_2'

Először csak a feszültséggenerátor dolgozik. Az áramgenerátort kiiktatjuk, vagyis szakadással helyettesítjük.



Az áramgenerátor helyén szakadás van.

A generátor felől nézve: az R2 és R1 párhuzamos, ehhez sorban van az R3.

$$R_e = R_3 + R_2 \times R_1 = 10\ \Omega + \frac{8 \cdot 4}{8 + 4}\ \Omega = 12{,}67\ \Omega$$

A generátor árama 10 volt osztva 12,67 ohmmal, vagyis 0,789 amper.

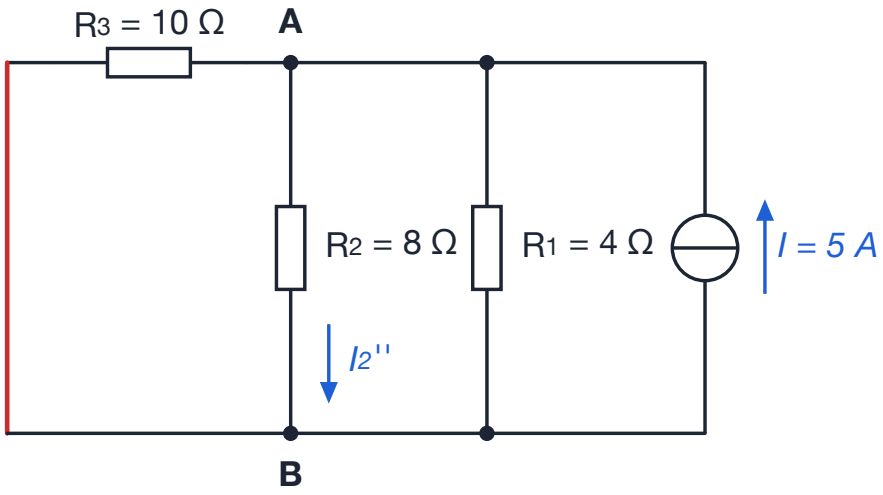
$$I_e = \frac{U}{R_e} = \frac{10\ V}{12{,}67\ \Omega} = 0{,}789\ A$$

Ez az áram megoszlik a 8 és a 4 ohmos ellenállás között. Áramosztóval az R2-re jutó rész a másik ellenállás, a 4 ohm, osztva a kettő összegével.

EREDMÉNY $I_2' = I_e \cdot \frac{R_1}{R_1 + R_2} = 0{,}789\ A \cdot \frac{4}{12} = 0{,}263\ A$

b) Csak az áramgenerátor: I_2''

Most csak az áramgenerátor dolgozik. A feszültséggenerátort rövidzárral helyettesítjük.



A feszültséggenerátor helyén rövidzár van.

A rövidzár miatt az R3 is az A és B pont közé kerül. Így három ellenállás van párhuzamosan: 10, 8 és 4 ohm.

R_3, R_2 és R_1 mind az A–B pontok közé kapcsolódik.

Az áramosztáshoz vonjuk össze az R1-et és az R3-at: 4 replusz 10 egyenlő 40 per 14, vagyis 2,857 ohm.

$$R_1 \times R_3 = \frac{4 \cdot 10}{4 + 10}\ \Omega = \frac{40}{14}\ \Omega = 2{,}857\ \Omega$$

Az 5 amper megoszlik e között és a 8 ohm között. Az R2-re jutó áram 1,316 amper.

EREDMÉNY $I_2'' = I \cdot \frac{R_1 \times R_3}{R_1 \times R_3 + R_2} = 5\ A \cdot \frac{2{,}857}{10{,}857} = 1{,}316\ A$

Összegzés

Mindkét részáram a bejelölt irányba, vagyis lefelé folyik, ezért pozitív előjellel adjuk össze őket.

$$I_2 = I_2' + I_2'' = 0{,}263\ A + 1{,}316\ A$$

Az eredmény 1,579 amper.

EREDMÉNY $I_2 = 1{,}579\ \text{A}$

Ellenőrizhetjük egyetlen csomóponti egyenlettel is: az A pont potenciálja 12,63 volt, ezt osztva 8 ohmmal szintén 1,579 ampert kapunk.

$$\frac{10 - U_A}{10} + 5 = \frac{U_A}{8} + \frac{U_A}{4} \rightarrow U_A = 12{,}63\ \text{V}$$

$$I_2 = \frac{12{,}63\ \text{V}}{8\ \Omega} = 1{,}579\ \text{A}$$

EZT JEGYEZD MEG!

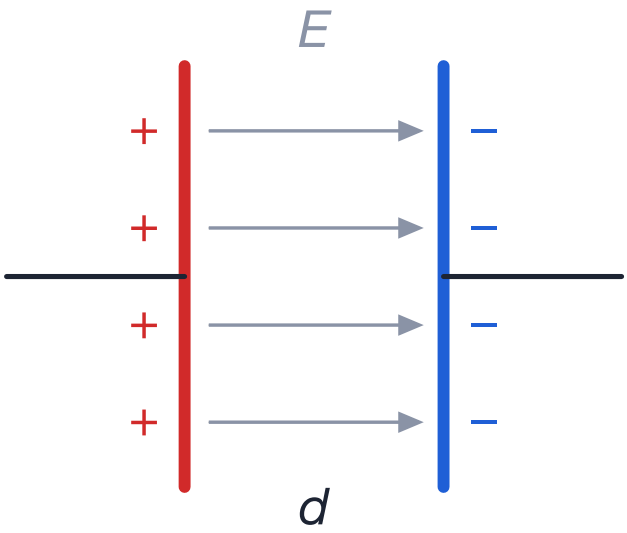
- Áramgenerátor kiiktatása: szakadás. Feszültséggenerátor kiiktatása: rövidzár.
- Áramosztónál a **másik** ágat írjuk a számlálóba.
- Eredmény: I_2 = 0,263 + 1,316 = 1,579 A.

4. Villamos és mágneses tér

4.1 Villamos tér és a kondenzátor

Villamos tér

A töltések maguk körül villamos teret hoznak létre. Ez a tér erőt fejt ki a benne lévő többi töltésre.



> **Villamos tér** – a töltések körül kialakuló tér, amely a benne lévő töltésekre erőt fejt ki. Jellemzője az E térerősség [V/m].

Két párhuzamos fémlemez között, ha feszültséget kapcsolunk rájuk, egyenletes, úgynevezett homogén tér alakul ki. A térerősség a feszültség osztva a lemezek távolságával.

TÉRERŐSSÉG

$$E = \frac{U}{d} \left[\frac{V}{m}\right]$$

Ez az elrendezés a kondenzátor. Feszültség hatására az egyik lemezen pozitív, a másikon negatív töltés gyűlik össze, vagyis a kondenzátor töltést tárol.

> **Kondenzátor** – két, szigetelővel elválasztott fémlemez (fegyverzet); töltést és villamos energiát tárol.

A kapacitás

Azt, hogy egy kondenzátor adott feszültségen mennyi töltést tárol, a kapacitás adja meg. Mértékegysége a farad.

KAPACITÁS

$$C = \frac{Q}{U} \left[F = \frac{As}{V}\right]$$

Síkkondenzátornál a kapacitás arányos a lemezek felületével, és fordítottan arányos a távolságukkal. A lemezek közötti szigetelő anyag növeli a kapacitást.

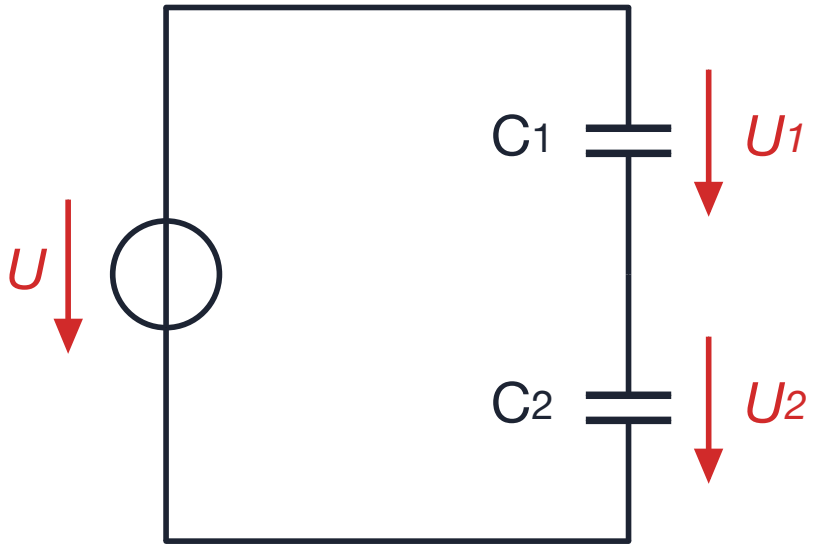
$$C = \varepsilon_0 \, \varepsilon_r \, \frac{A}{d}, \; \varepsilon_0 = 8{,}86 \cdot 10^{-12} \, \frac{As}{Vm}$$

Egy farad nagyon nagy érték, ezért a gyakorlatban mikrofarad, nanofarad és pikofarad nagyságú kondenzátorokkal találkozunk.

ℹ Gyakori értékek: μF, nF, pF.

Soros és párhuzamos kondenzátorok

Sorba kötött kondenzátorok fegyverzetein ugyanakkora töltés gyűlik össze, a feszültségek pedig összeadódnak.



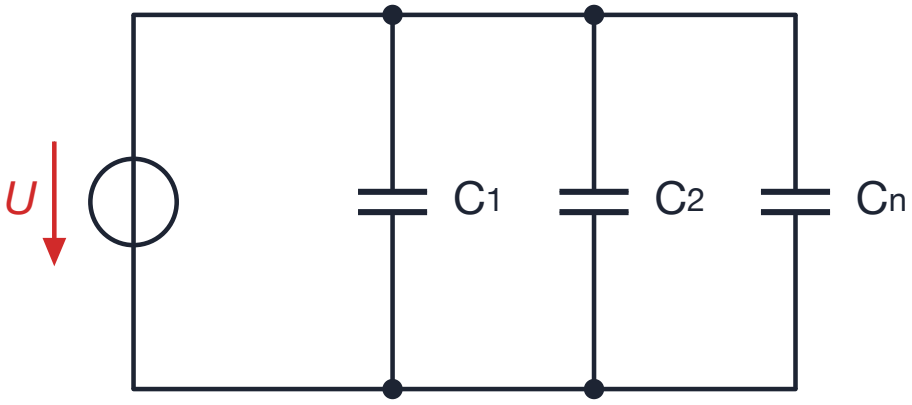
$$Q = C_1 \, U_1 = C_2 \, U_2, \; U = U_1 + U_2$$

A feszültségeket a töltés és a kapacitás hányadosaként felírva, majd a töltéssel osztva kapjuk: sorosan a kapacitások reciprokai adódnak össze.

SOROS EREDŐ

$$\frac{1}{C_e} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} \rightarrow C_e = \frac{C_1 \, C_2}{C_1 + C_2}$$

Párhuzamosan kötve mindegyik kondenzátoron ugyanaz a feszültség van, a töltések pedig összeadódnak. Ezért a kapacitások egyszerűen összeadódnak.



PÁRHUZAMOS EREDŐ

$$C_e = C_1 + C_2 + \ldots + C_n$$

Figyeld meg: ez pont fordítva van, mint az ellenállásoknál! Például egy 2 és egy 3 mikrofarados kondenzátor sorosan 1,2, párhuzamosan 5 mikrofarad.

$$\text{soros: } \frac{2 \cdot 3}{2+3} = 1{,}2\ \mu\text{F}, \text{ párhuzamos: } 2 + 3 = 5\ \mu\text{F}$$

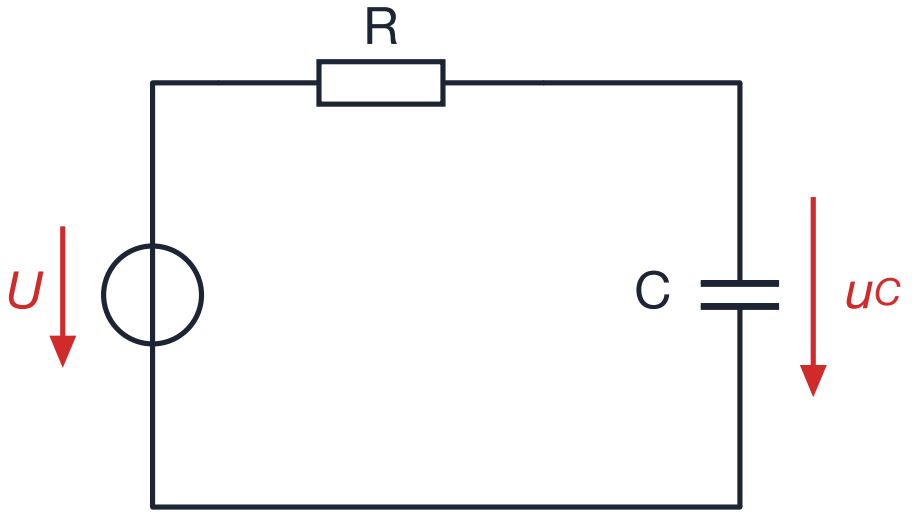
EZT JEGYEZD MEG!

- Soros C: reciprokok összege (mint párhuzamos R).
- Párhuzamos C: összeg (mint soros R).

4.2 A kondenzátor feltöltődése

Töltődés ellenálláson keresztül

Kapcsoljunk egy kondenzátort egy ellenálláson keresztül egyenfeszültségre. A kezdetben üres kondenzátor nem töltődik fel azonnal.

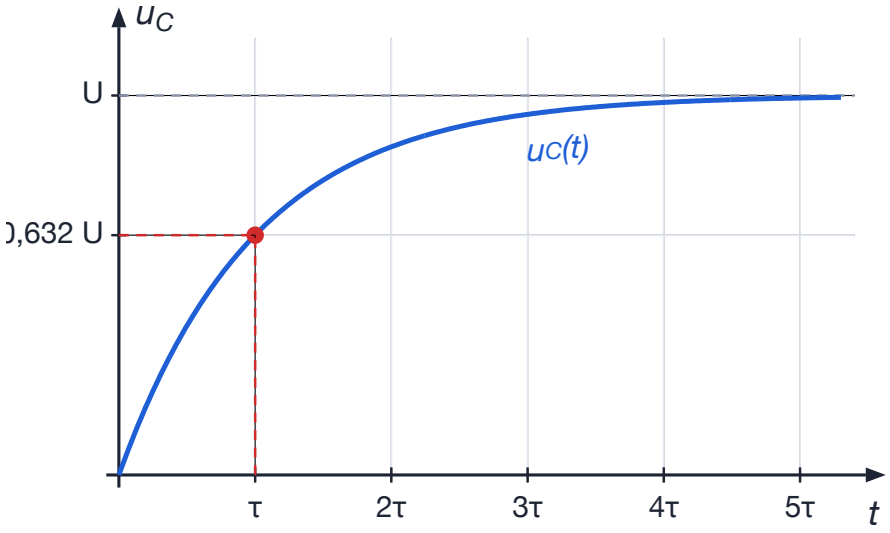


Kezdetben a kondenzátor üres: $u_C = 0$, az áram $I = U/R$.

Az első pillanatban a kondenzátor feszültsége nulla, így a teljes feszültség az ellenálláson van, és nagy áram folyik.

Ahogy a kondenzátor töltődik, nő a feszültsége, ezért csökken az ellenálláson eső feszültség és az áram.

Ahogy a kondenzátor töltődik, a feszültsége nő, az áram pedig egyre kisebb. A feszültség exponenciálisan közelít a tápfeszültséghez.



FELTÖLTŐDÉS

$$u_C(t) = U \cdot (1 - e^{-t/\tau})$$

Az időállandó

A folyamat sebességét az időállandó határozza meg, amely az ellenállás és a kapacitás szorzata.

IDŐÁLLANDÓ

$$\tau = R \cdot C \ [s]$$

Egy időállandó alatt a kondenzátor a tápfeszültség 63,2 százalékáig töltődik. Körülbelül öt időállandó után gyakorlatilag teljesen feltöltődött.

- $t = \tau$: $u_C = 0{,}632\ U$
- $t = 5\tau$: $u_C \approx 0{,}993\ U$ – gyakorlatilag feltöltődött

Példa: 10 kiloohm és 100 mikrofarad esetén az időállandó 10 ezer szorozva 100 milliomod, vagyis 1 másodperc.

$$\tau = 10\ k\Omega \cdot 100\ \mu F = 10^4\ \Omega \cdot 10^{-4}\ F = 1\ s$$

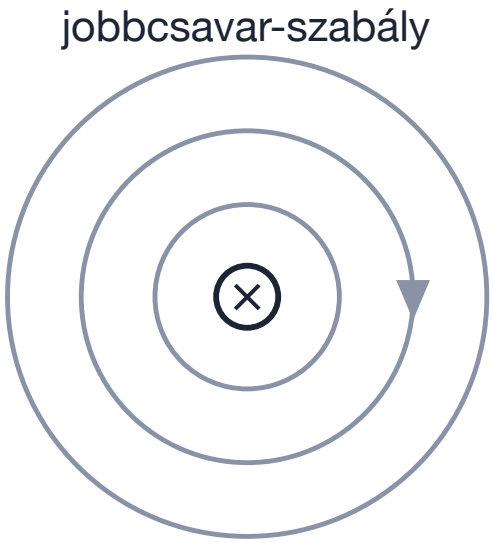
EZT JEGYEZD MEG!

- $\tau = RC$
- τ alatt 63,2 %, kb. 5τ alatt teljesen feltöltődik.

4.3 Mágneses tér és gerjesztési törvény

Az áram mágneses tere

Az árammal átjárt vezető körül mágneses tér alakul ki. Az erővonalak koncentrikus körök, irányukat a jobbcsavar-szabály adja meg.



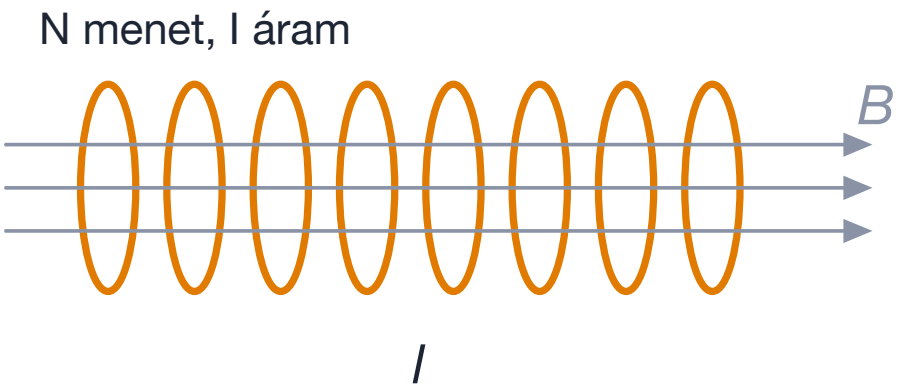
> **Jobbcsavar-szabály** – ha a jobbmenetes csavart az áram irányába hajtjuk, a forgásiránya adja a mágneses erővonalak irányát.

A mágneses tér erősségét a mágneses térerősség jellemzi. Egyenes vezető körül a térerősség a távolsággal fordítottan arányos.

$$H = \frac{I}{2\,\pi\,r}\ [\frac{A}{m}]$$

Tekercs és gerjesztési törvény

Ha a vezetőt tekercsbe csévéljük, a menetek tere összeadódik, és a tekercs belsejében erős, közel egyenletes mágneses tér jön létre.



N menetes, l hosszúságú tekercs (szolenoid), I árammal.

A gerjesztési törvény szerint a gerjesztés, vagyis a menetszám és az áram szorzata, egyenlő a térerősség és az erővonalhossz szorzatával.

GERJESZTÉSI TÖRVÉNY

$$\Theta = N \cdot I = H \cdot l$$

A mágneses indukció légmagos tekercsben a vákuum permeabilitásának és a térerősségnek a szorzata.

MÁGNESES INDUKCIÓ

$$B = \mu_0 \cdot H = \mu_0 \frac{N \cdot I}{l} \; [T]$$

Ha vasmagot teszünk a tekercsbe, az indukció a relatív permeabilitással szorzódik, ami vasnál több százszoros, akár több ezerszeres is lehet.

$$B = \mu_r \, \mu_0 \frac{N \, I}{l}, \; \mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{Vs}{Am}$$

Fluxus és egy számpélda

A mágneses fluxus az indukció és a felület szorzata. Azt mutatja meg, mennyi mágneses erővonal halad át a tekercs keresztmetszetén. Mértékegysége a weber.

FLUXUS

$$\Phi = B \cdot A \; [Wb = Vs]$$

Példa: egy 500 menetes, 20 centiméter hosszú légmagos tekercsben 2 amper folyik. A térerősség 500 szorozva 2, osztva 0,2 méterrel, vagyis 5000 amper per méter.

$$H = \frac{N \, I}{l} = \frac{500 \cdot 2 \; A}{0{,}2 \; m} = 5000 \frac{A}{m}$$

Az indukció ennek és a vákuum permeabilitásának a szorzata: körülbelül 6,28 millitesla.

$$B = \mu_0 H = 4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 5000 = 6{,}28 \cdot 10^{-3}\ T = 6{,}28\ mT$$

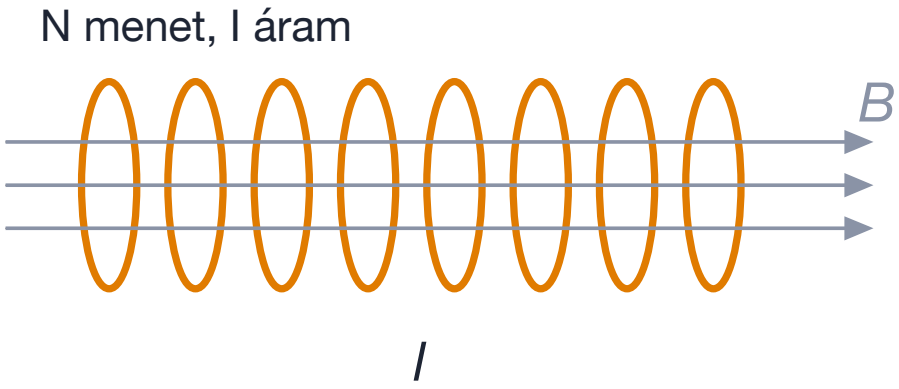
EZT JEGYEZD MEG!

- $\Theta = N I = H l$
- $B = \mu_0 \mu_r N I / l$
- $\Phi = B A$

4.4 Indukció és induktivitás

Erőhatás és mozgási indukció

Mágneses térben az árammal átjárt vezetőre erő hat. Ez a villamos motorok működésének alapja.



ERŐ ÁRAMJÁRTA VEZETŐRE

$$F = B \cdot I \cdot l\ [N]$$

Fordítva is igaz: ha egy vezetőt mágneses térben mozgatunk, a vezetőben feszültség indukálódik. Ez a mozgási indukció, a generátorok elve.

MOZGÁSI INDUKCIÓ

$$U_i = B \cdot l \cdot v$$

Nyugalmi indukció és önindukció

Akkor is feszültség indukálódik, ha a vezető áll, de a tekercsen áthaladó fluxus megváltozik. Ez a nyugalmi indukció, a transzformátor működésének alapja.

INDUKCIÓTÖRVÉNY

$$U_i = -N \cdot \frac{\Delta \Phi}{\Delta t}$$

A mínusz előjel Lenz törvényét fejezi ki: az indukált feszültség mindig olyan irányú, hogy akadályozza az őt létrehozó változást.

ℹ Lenz törvénye: az indukált hatás a kiváltó oka ellen hat.

Ha egy tekercs saját árama változik, a saját meneteiben is feszültség indukálódik. Ez az önindukció, mértéke az induktivitás, mértékegysége a henri.

ÖNINDUKCIÓ

$$U_i = -L \frac{\Delta I}{\Delta t}, \; L = \mu \frac{N^2 A}{l} \; [H]$$

Az induktivitás a menetszám négyzetével arányos. A tekercs ezért a változó áram ellen hat, ami a váltakozó áramú körökben lesz nagyon fontos.

EZT JEGYEZD MEG!

- Mozgó vezető mágneses térben: $U_i = B\,l\,v$.
- Változó fluxus: $U_i = -N\,\Delta\Phi/\Delta t$.
- Tekercs: $L \propto N^2$, a változó áram ellen hat.

Képletkártya

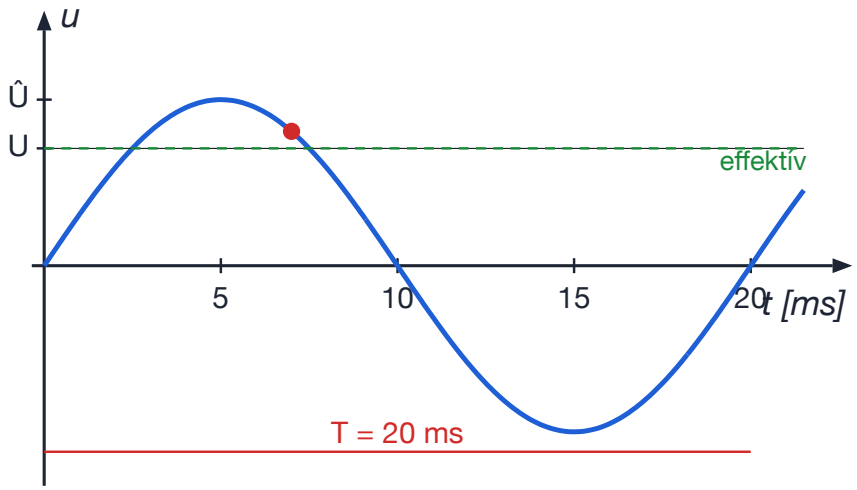
Kapacitás	$C = \frac{Q}{U} = \varepsilon_0 \, \varepsilon_r \, \frac{A}{d} \; [F]$
Soros kondenzátorok	$\frac{1}{C_e} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \dots$
Párhuzamos kondenzátorok	$C_e = C_1 + C_2 + \dots$
RC töltődés	$u_C(t) = U \, (1 - e^{-t/\tau}), \; \tau = R \, C$
Gerjesztési törvény	$\Theta = N \cdot I = H \cdot l$
Mágneses indukció	$B = \mu_0 \, \mu_r \, H = \mu_0 \, \mu_r \, \frac{N \, I}{l} \; [T]$
Fluxus	$\Phi = B \cdot A \; [Wb = Vs]$
Indukált feszültség	$U_i = -N \, \frac{\Delta \Phi}{\Delta t}$
Önindukció	$U_i = -L \, \frac{\Delta I}{\Delta t}, \; L = \mu \, \frac{N^2 \, A}{l} \; [H]$
Erő áramjárta vezetőre	$F = B \cdot I \cdot l$

5. Szinuszos váltakozó áram

5.1 A szinuszos jel és az effektív érték

A szinuszos jel jellemzői

A hálózati feszültség nem állandó, hanem szinusz szerint váltakozik. Másodpercenként ötvenszer ismétlődik.



SZINUSZOS FESZÜLTSÉG

$$u(t) = \hat{U} \cdot \sin(\omega\, t)$$

A jel legnagyobb értéke a csúcsérték. Egy teljes rezgés ideje a periódusidő, a másodpercenkénti rezgések száma pedig a frekvencia.

- Û – csúcsérték (amplitúdó)
- T – periódusidő [s]
- f = 1/T – frekvencia [Hz]
- ω = 2πf – körfrekvencia [rad/s]

Ötven hertznél a periódusidő 20 milliszekundum, a körfrekvencia 2 pí szorozva 50, vagyis körülbelül 314 radián per szekundum.

$$f = 50\ \text{Hz} \rightarrow T = 20\ \text{ms},\ \omega = 2\pi \cdot 50 = 314{,}16\ \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

A pillanatérték bármely időpontra kiszámolható. Például egy 10 voltos csúcsértékű, 50 hertzes jel értéke 7 milliszekundumnál 8,09 volt.

$$u = 10\ \text{V} \cdot \sin(314{,}16 \cdot 0{,}007) = 10\ \text{V} \cdot \sin(126°) = 8{,}09\ \text{V}$$

Az effektív érték

Ha a váltakozó áram egy ellenálláson folyik, hőt termel, csakúgy, mint az egyenáram. Az effektív érték az az egyenáram, amely ugyanannyi hőt termelne.

> **Effektív érték** – az a egyenfeszültség (egyenáram), amely ugyanazon az ellenálláson ugyanakkora átlagteljesítményt, hőhatást hoz létre. Angolul RMS.

Az átlagos teljesítmény a csúcsértékek szorzatának fele. Ezt két gyök kettő szorzataként írva kapjuk, hogy az effektív érték a csúcsérték osztva gyök kettővel.

$$P_{\text{átlag}} = \frac{\hat{U} \cdot \hat{I}}{2} = \frac{\hat{U}}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\hat{I}}{\sqrt{2}}$$

EFFEKTÍV ÉRTÉK

$$U = \frac{\hat{U}}{\sqrt{2}} = 0{,}707 \cdot \hat{U}$$

A hálózati 230 volt is effektív érték. A csúcsértéke 230 szorozva gyök kettővel, vagyis 325 volt.

$$\hat{U} = \sqrt{2} \cdot 230\ \text{V} = 325\ \text{V}$$

Ha nem mondjuk külön, a váltakozó feszültség és áram értéke mindig effektív érték, és a teljesítmény-képletekbe is ezt írjuk.

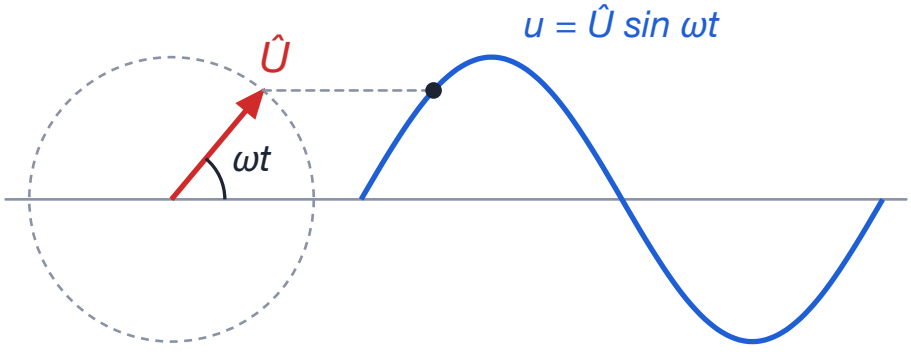
EZT JEGYEZD MEG!

- $T = 1/f$, $\omega = 2\pi f$; 50 Hz → 20 ms, 314 rad/s.
- Effektív érték: $U = \hat{U}/\sqrt{2}$.
- A 230 V effektív érték, csúcsa 325 V.

5.2 Forgóvektor és komplex számok

A forgóvektor

A szinuszos jelet egy forgó vektorral ábrázolhatjuk. A vektor hossza a csúcsérték, és az óramutató járásával ellentétesen forog, omega szögsebességgel.



A forgó vektor függőleges vetülete éppen a szinusz pillanatértéke.

A vektor függőleges vetülete minden pillanatban éppen a szinuszos jel pillanatértéke. Így a szinuszt egyetlen nyíllal helyettesíthetjük.

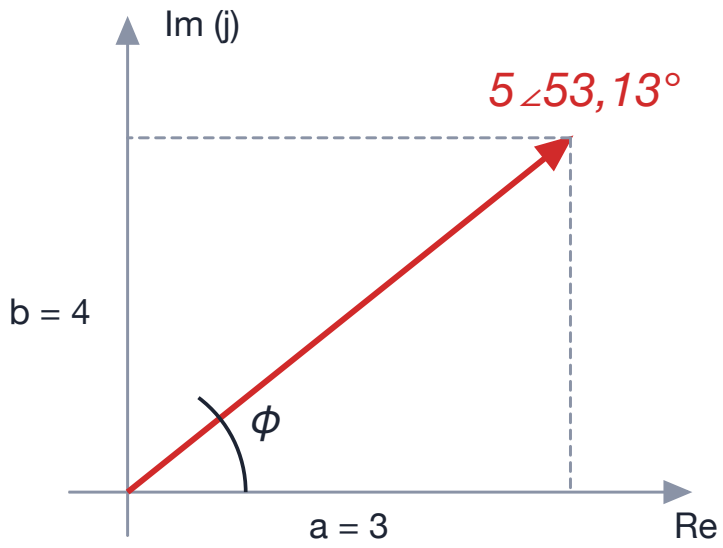
> ℹ Azonos frekvenciájú jeleknél a vektorok együtt forognak, ezért egymáshoz képesti helyzetük, a fázisszög állandó.

Mivel minden vektor együtt forog, elég egy pillanatot lerajzolni. Ezt nevezzük vektorábrának vagy fazorábrának. A vektor hosszát általában az effektív értékre vesszük.

> **Vektorábra (fazorábra)** – az azonos frekvenciájú szinuszos mennyiségeket ábrázoló, egy pillanatban „megállított” vektorok rajza.

Komplex számok röviden

A vektorokkal komplex számok segítségével számolunk. A képzetes egység jele a műszaki életben j, és j négyzet egyenlő mínusz egy.



KÉPZETES EGYSÉG

$$j^2 = -1$$

Egy komplex szám kétféle alakban írható. Algebrai alakban valós és képzetes részként, szöges alakban hosszként és szögként.

$$\overline{U} = a + j\,b = U \angle \varphi$$

Átváltás: a hossz gyök alatt a négyzet plusz b négyzet, a szög pedig b per a arkusz tangense. Visszafelé: a valós rész a hossz szorozva a szög koszinuszával, a képzetes rész a hossz szorozva a szög szinuszával.

$$U = \sqrt{a^2 + b^2},\ \varphi = \operatorname{arctg} \frac{b}{a}$$

$$a = U \cos \varphi,\ b = U \sin \varphi$$

Például a 3 plusz j4 hossza 5, szöge 53,13 fok.

$$3 + j4 = \sqrt{9 + 16} \angle \operatorname{arctg} \frac{4}{3} = 5 \angle 53{,}13°$$

Műveletek és a 27. kérdés példája

Összeadni és kivonni algebrai alakban kell, a valós és a képzetes részeket külön. Szorozni és osztani szöges alakban a legkönnyebb: a hosszakat szorozzuk vagy osztjuk, a szögeket összeadjuk vagy kivonjuk.

Művelet	Melyik alakban?	Szabály
összeadás, kivonás	algebrai	valós és képzetes részek külön
szorzás	szöges	hosszak szorzata, szögek összege
osztás	szöges	hosszak hányadosa, szögek különbsége

A 27. vizsgakérdés: írjuk fel komplex alakban az u egyenlő 100 szinusz 314 t mínusz pí negyed feszültséget! Az effektív érték 100 osztva gyök kettővel, 70,7 volt, a szög mínusz 45 fok.

$$u(t) = 100 \sin(314\ t - \pi/4) \rightarrow U = \frac{100}{\sqrt{2}} = 70{,}7\ \text{V},\ \varphi = -45°$$

Algebrai alakban: 70,7 szorozva koszinusz mínusz 45 fokkal, ez 50, a képzetes rész 70,7 szorozva szinusz mínusz 45 fokkal, ez mínusz 50.

EREDMÉNY $\overline{U} = 70{,}7 \angle -45°\ \text{V} = (50 - j50)\ \text{V}$

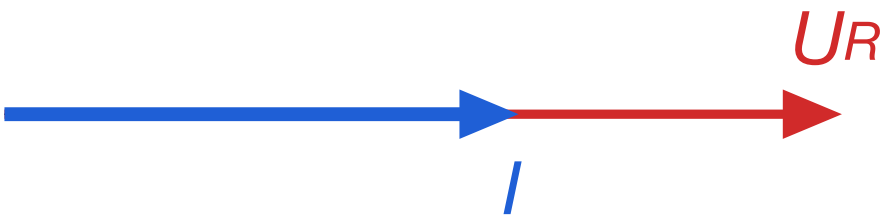
EZT JEGYEZD MEG!

- Számológép: fok (DEG) mód!
- Összeadás: algebrai alak. Szorzás, osztás: szöges alak.
- A vektor hossza az effektív érték.

5.3 Ellenállás, tekercs és kondenzátor váltakozó áramon

Ellenállás és tekercs

Az ellenálláson az áram és a feszültség fázisban van: egyszerre érik el a csúcsukat. A vektoraik egy irányba mutatnak.



Ellenállás: U_R és I **fázisban** van (ϕ = 0).

A tekercsben az áramváltozás feszültséget indukál, amely az áram ellen hat. Emiatt a tekercs árama 90 fokot késik a feszültségéhez képest.

Tekercs: a feszültség 90°-ot **siet** az áramhoz képest.

A tekercs áramkorlátozó hatása az induktív reaktancia. A frekvenciával arányosan nő.

INDUKTÍV REAKTANCIA

$$X_L = \omega L = 2 \pi f L \, [\Omega]$$

Például egy 0,1 henris tekercs reaktanciája 50 hertzen 31,4 ohm.

$$X_L = 2\pi \cdot 50 \cdot 0{,}1 = 31{,}4 \, \Omega$$

Kondenzátor

A kondenzátor árama a feszültség változásával arányos. Emiatt a kondenzátor árama 90 fokot siet a feszültségéhez képest.

Kondenzátor: a feszültség 90°-ot **késik** az áramhoz képest.

A kondenzátor áramkorlátozó hatása a kapacitív reaktancia. A frekvencia növelésével csökken.

KAPACITÍV REAKTANCIA

$$X_C = \frac{1}{\omega C} = \frac{1}{2 \pi f C} \, [\Omega]$$

Például egy 100 mikrofarados kondenzátor reaktanciája 50 hertzen 31,8 ohm.

$$X_C = \frac{1}{2\pi \cdot 50 \cdot 100 \cdot 10^{-6}} = 31{,}8 \, \Omega$$

A reaktancián a teljesítmény nem alakul hővé. A tekercs és a kondenzátor az energiát csak ideiglenesen tárolja, majd visszaadja. Ezért nevezzük meddő ellenállásnak.

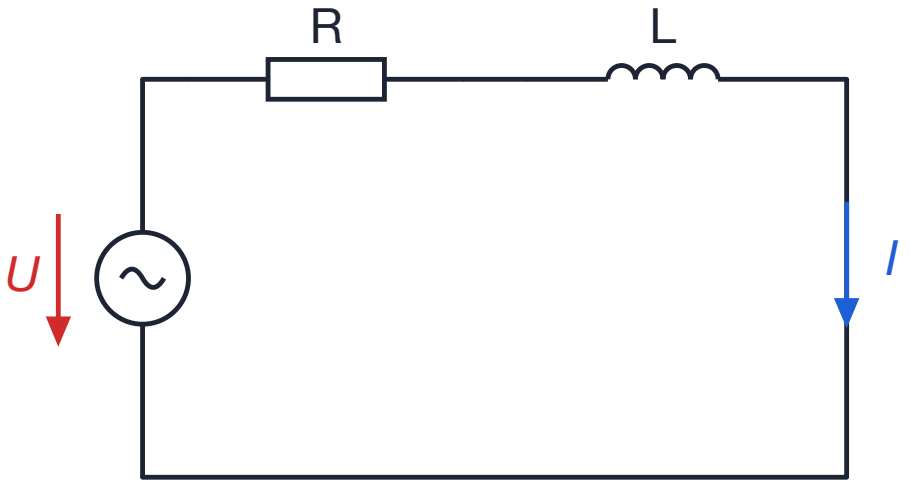
ℹ A reaktancia „meddő” ellenállás: nem fogyaszt hatásos teljesítményt.

EZT JEGYEZD MEG!

- R: fázisban. L: U siet 90°-ot. C: U késik 90°-ot.
- $X_L = \omega L$, $X_C = 1/(\omega C)$.

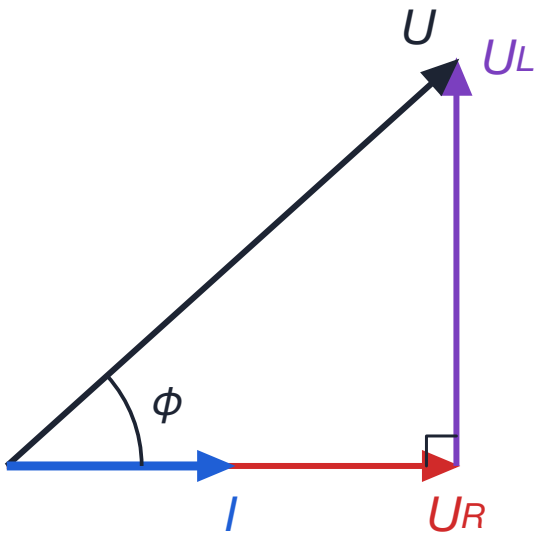
Soros RL kör

Most kössünk sorba egy ellenállást és egy tekercset. Mindkettőn ugyanaz az áram folyik, ezért az áramot vesszük vízszintes vonatkoztatási vektornak.



Soros kör: a közös mennyiség az **áram**, ezért ez a vonatkoztatási vektor.

Az ellenállás feszültsége az árammal egy irányba mutat, a tekercsé 90 fokkal előtte, felfelé. A két feszültség vektoros összege a teljes feszültség.



$$U^2 = U_R^2 + U_L^2$$

A feszültség ϕ szöggel siet az áramhoz képest. A szög tangense a tekercs és az ellenállás feszültségének hányadosa, ami ugyanannyi, mint a reaktancia per ellenállás.

FÁZISSZÖG

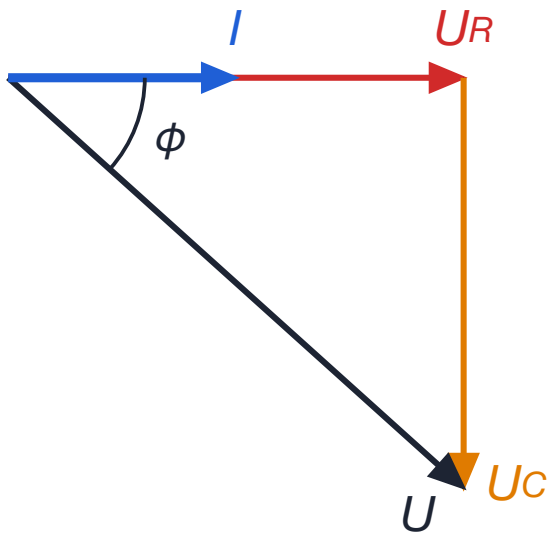
$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{U_L}{U_R} = \frac{X_L}{R}$$

Példa: 30 ohm és 40 ohm induktív reaktancia. Az impedancia gyök alatt 900 plusz 1600, vagyis 50 ohm. 100 voltra kapcsolva 2 amper folyik, a fázisszög 53,13 fok.

$$Z = \sqrt{30^2 + 40^2} = 50\ \Omega,\ I = \frac{100\ \mathrm{V}}{50\ \Omega} = 2\ \mathrm{A},\ \varphi = \operatorname{arctg}\frac{40}{30} = 53{,}13°$$

Soros RC kör

Ellenállás és kondenzátor soros kapcsolásánál a kondenzátor feszültsége 90 fokkal késik az áramhoz képest, tehát lefelé mutat.



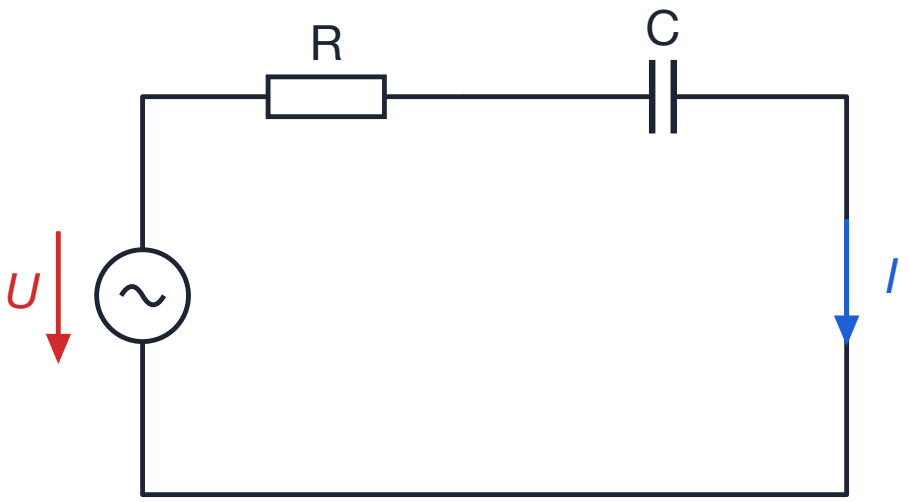
$$U^2 = U_R{}^2 + U_C{}^2$$

Itt a teljes feszültség ϕ szöggel késik az áramhoz képest.

FÁZISSZÖG (U KÉSIK)

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{U_C}{U_R} = \frac{X_C}{R}$$

Ez a két vektorábra a 16. és a 17. vizsgakérdés. Rajzold le mindkettőt, írd fel a reaktancia képletét, és egy mondatban mondd meg, siet vagy késik a feszültség.



★ 16–17. kérdés: vektorábra + X_C vagy X_L képlete + „a feszültség késik / siet az áramhoz képest”.

A komplex impedancia

Az ellenállást és a reaktanciákat egyetlen komplex számba foglalhatjuk össze. Ez az impedancia. Az induktív reaktancia pozitív, a kapacitív negatív képzetes részt ad.

IMPEDANCIA

$$\overline{Z} = R + j\,X_L - j\,X_C\ [\Omega]$$

Az impedancia nagysága a valós és a képzetes rész négyzetösszegének gyöke. Ezzel Ohm törvénye komplex alakban is érvényes.

$$|Z| = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2},\ \overline{U} = \overline{Z} \cdot \overline{I},\ \overline{I} = \frac{\overline{U}}{\overline{Z}}$$

Soros kapcsolásban az impedanciák összeadódnak, párhuzamos kapcsolásban pedig ugyanúgy replusszal számolunk, mint az ellenállásoknál, csak komplex számokkal.

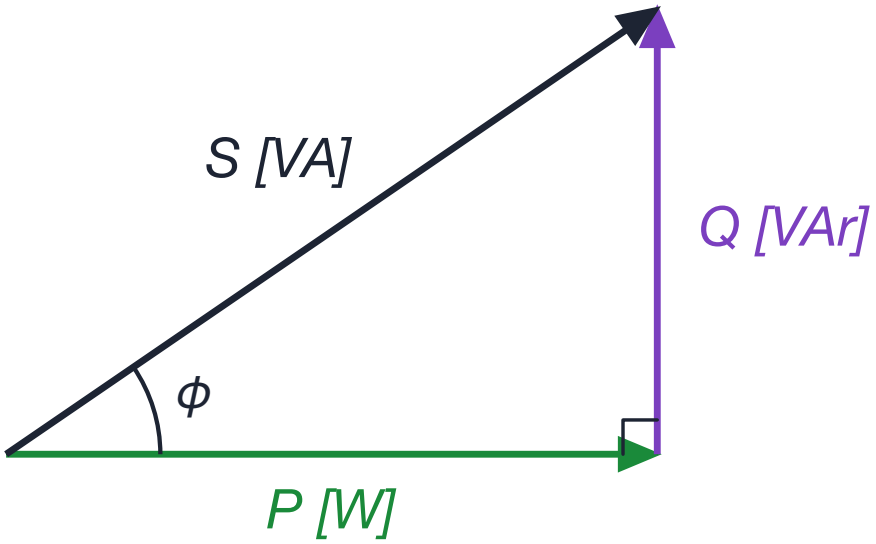
EZT JEGYEZD MEG!

- Soros: $Z_e = Z_1 + Z_2$. Párhuzamos: $Z_1\,Z_2\,/\,(Z_1 + Z_2)$.
- Induktív: +jX. Kapacitív: –jX.

5.4 Teljesítmények és teljesítménytényező

Hatásos, meddő és látszólagos teljesítmény

Váltakozó áramon háromféle teljesítményt különböztetünk meg. A hatásos teljesítmény az, ami ténylegesen munkát végez vagy hővé alakul.



HATÁSOS TELJESÍTMÉNY

$$P = U \cdot I \cdot \cos \varphi \, [W]$$

A meddő teljesítmény a tekercs és a kondenzátor között ide-oda áramló energia. Mértékegysége a voltamper reaktív, röviden vár.

MEDDŐ TELJESÍTMÉNY

$$Q = U \cdot I \cdot \sin \varphi \, [VAr]$$

A látszólagos teljesítmény a feszültség és az áram szorzata. Mértékegysége a voltamper. A három teljesítmény egy derékszögű háromszöget alkot.

LÁTSZÓLAGOS TELJESÍTMÉNY

$$S = U \cdot I \, [VA], \; S^2 = P^2 + Q^2$$

A teljesítménytényező, koszinusz fí, megmutatja, hogy a látszólagos teljesítmény hányad része alakul hatásos teljesítménnyé.

TELJESÍTMÉNYTÉNYEZŐ

$$\cos \varphi = \frac{P}{S}$$

Számpélda és fázisjavítás

Az előző soros RL körnél 100 volton 2 amper folyt, 53,13 fokos fázisszöggel. A teljesítménytényező 0,6.

$$S = 100 \text{ V} \cdot 2 \text{ A} = 200 \text{ VA}, \cos \varphi = 0{,}6, \sin \varphi = 0{,}8$$

A hatásos teljesítmény 120 watt, a meddő 160 vár. Ellenőrzés: 2 amper négyzete szorozva 30 ohmmal szintén 120 watt.

$$P = 200 \cdot 0{,}6 = 120\ \text{W} = I^2 R,\ Q = 200 \cdot 0{,}8 = 160\ \text{VAr} = I^2 X_L$$

A nagy meddő teljesítmény rossz, mert a meddő áram is terheli a vezetékeket és melegíti őket. Ezért az induktív fogyasztókkal párhuzamosan kondenzátort kötnek. Ez a fázisjavítás, vagy kompenzálás.

ℹ Fázisjavítás: párhuzamos kondenzátor. A kondenzátor kapacitív árama kompenzálja a tekercs induktív áramát, így cos φ nő (akár 1-ig).

EZT JEGYEZD MEG!

- P [W], Q [VAr], S [VA]; $S^2 = P^2 + Q^2$.
- $\cos\varphi = P/S$.
- Fázisjavítás: párhuzamos kondenzátorral.

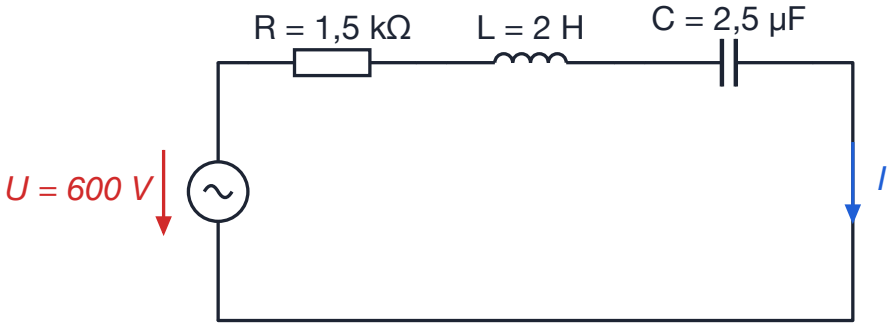
Képletkártya

Szinuszos feszültség	$u(t) = \hat{U} \sin(\omega t + \varphi)$
Frekvencia, körfrekvencia	$f = \frac{1}{T},\ \omega = 2\pi f$
Effektív érték	$U = \frac{\hat{U}}{\sqrt{2}} = 0{,}707\ \hat{U}$
Induktív reaktancia	$X_L = \omega L = 2\pi f L$
Kapacitív reaktancia	$X_C = \frac{1}{\omega C} = \frac{1}{2\pi f C}$
Soros impedancia	$Z = R + j(X_L - X_C),\ \lvert Z\rvert = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}$
Ohm-törvény komplexen	$\overline{U} = \overline{Z} \cdot \overline{I}$
Fázisszög	$\operatorname{tg}\varphi = \frac{X}{R}$
Teljesítmények	$P = U I \cos\varphi\ [\text{W}],\ Q = U I \sin\varphi\ [\text{VAr}],\ S = U I\ [\text{VA}]$
Teljesítmény-háromszög	$S^2 = P^2 + Q^2,\ \cos\varphi = \frac{P}{S}$
Soros rezonancia	$f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{L C}}$

Mintafeladat: soros RLC kör (Órai feladat (Példatár 3.1))

A feladat

Az órán megoldott feladat: egy soros RLC kört 600 voltos, 50 hertzes szinuszos feszültségről táplálunk.



$U = 600\ V$ $f = 50\ Hz$ $R = 1{,}5\ k\Omega$ $L = 2\ H$ $C = 2{,}5\ \mu F$

Határozzuk meg a forrásból felvett áramot és a teljesítménytényezőt, rajzoljuk meg a vektorábrát, és számoljuk ki a rezonanciafrekvenciát és a rezonanciában folyó áramot!

Keresett: I, cos φ, vektorábra, f_0, I_0.

1. Reaktanciák

Először a körfrekvencia: 2 pí szorozva 50, vagyis 314,16 radián per szekundum.

$$\omega = 2\pi f = 314{,}16\ \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

Az induktív reaktancia omega szorozva L, 314,16 szorozva 2, vagyis 628,3 ohm.

$$X_L = \omega L = 314{,}16 \cdot 2 = 628{,}3\ \Omega$$

A kapacitív reaktancia egy osztva omega szorozva C-vel: egy osztva 314,16 szorozva 2,5 milliomoddal, ami 1273,2 ohm.

$$X_C = \frac{1}{\omega C} = \frac{1}{314{,}16 \cdot 2{,}5 \cdot 10^{-6}} = 1273{,}2\ \Omega$$

2. Impedancia és áram

A soros kör impedanciája: 1500 plusz j szorozva 628,3 mínusz 1273,2, vagyis 1500 mínusz j 644,9 ohm.

$$\overline{Z} = R + j(X_L - X_C) = 1500 + j(628{,}3 - 1273{,}2) = (1500 - j644{,}9)\ \Omega$$

Szöges alakban: a nagysága 1632,8 ohm, a szöge mínusz 23,27 fok. A negatív szög azt jelenti, hogy a kör kapacitív jellegű.

$$Z = \sqrt{1500^2 + 644{,}9^2} = 1632{,}8\ \Omega,\ \varphi_Z = \operatorname{arctg}\frac{-644{,}9}{1500} = -23{,}27°$$

Az áram a feszültség osztva az impedanciával. A feszültség szögét nullának vesszük, így az áram

0,3675 amper, plusz 23,27 fokos szöggel.

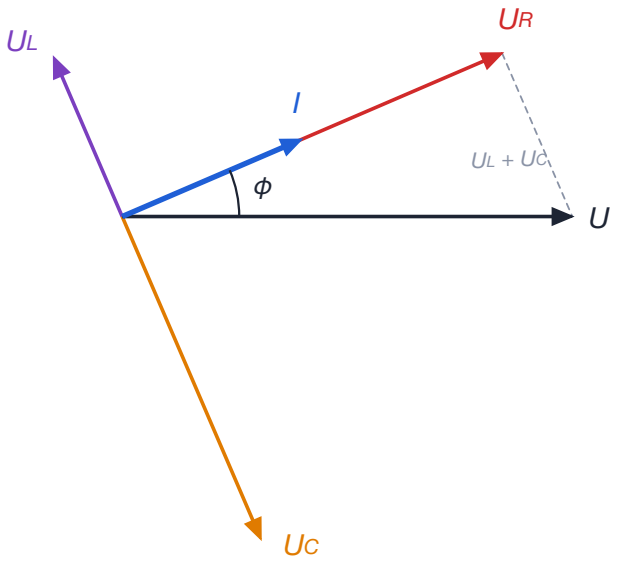
EREDMÉNY $\bar{I} = \frac{600\angle 0°\ \mathrm{V}}{1632{,}8\angle -23{,}27°\ \Omega} = 0{,}3675\angle 23{,}27°\ \mathrm{A}$

Figyelem: az órai jegyzetben az impedancia valós része elírással 150 szerepel. Helyesen 1500 ohm.

✎ Az órai jegyzetben „Z = 150 – j645” áll – helyesen **1500 – j644,9 Ω**.

3. Teljesítménytényező és vektorábra

A teljesítménytényező a feszültség és az áram közötti szög koszinusza: koszinusz 23,27 fok, ami 0,919. Az áram siet a feszültséghez képest, tehát a kör kapacitív.



EREDMÉNY $\cos\varphi = \cos 23{,}27° = 0{,}919\ \text{(kapacitív)}$

A vektorábrához kiszámoljuk a részfeszültségeket: az ellenálláson 551,2 volt, a tekercsen 230,9 volt, a kondenzátoron 467,9 volt.

$$U_R = I\,R = 551{,}2\ \mathrm{V},\ U_L = I\,X_L = 230{,}9\ \mathrm{V},\ U_C = I\,X_C = 467{,}9\ \mathrm{V}$$

Az ellenállás feszültsége az árammal egy irányba mutat, a tekercsé 90 fokkal előtte, a kondenzátoré 90 fokkal mögötte. A tekercs és a kondenzátor feszültsége ellentétes irányú, ezért a különbségük adódik az ellenállás feszültségéhez. Így kapjuk a 600 voltos tápfeszültséget.

⚠ A részfeszültségek számértékeinek összege nagyobb is lehet a tápfeszültségnél – vektorosan kell összeadni őket!

4. Rezonancia

Rezonanciában a két reaktancia egyenlő, így kioltják egymást, és a kör tisztán ohmos lesz.

$$X_L = X_C \rightarrow 2\pi\, f_0\, L = \frac{1}{2\pi\, f_0\, C}$$

Ebből a rezonanciafrekvencia egy osztva 2 pí szorozva gyök alatt L szorozva C. Az eredmény 71,18 hertz.

EREDMÉNY $f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{L\,C}} = \frac{1}{2\pi\sqrt{2 \cdot 2{,}5 \cdot 10^{-6}}} = 71{,}18\ \text{Hz}$

A jegyzetben itt is elírás van: 7,12 hertz szerepel, de a helyes érték 71,18 hertz.

✎ Az órai jegyzetben „7,12 Hz” áll – ez tizedesvessző-elcsúszás, helyesen **71,18 Hz** (a példatár 3.1 megoldása is 71,176 Hz). A jegyzet köztes sora, „$f_0 = 1/(4\pi^2 CL)$”, valójában $\mathbf{f_0^2}$-re igaz.

Rezonanciában az impedancia csak az ellenállás, ezért az áram 600 volt osztva 1500 ohmmal, vagyis 0,4 amper. Ez a lehető legnagyobb áram.

EREDMÉNY $I_0 = \frac{U}{R} = \frac{600\ \text{V}}{1500\ \Omega} = 0{,}4\ \text{A}$

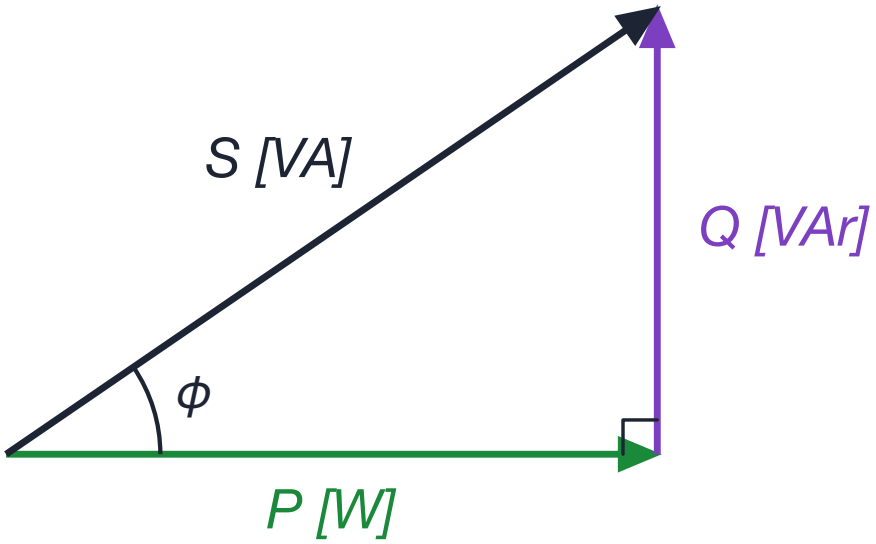
EZT JEGYEZD MEG!

- $Z = R + j(X_L - X_C)$; a szög előjele mutatja a jelleget.
- Rezonancia: $X_L = X_C$, $Z = R$, az áram maximális.

Mintafeladat: látszólagos és meddő teljesítmény (Példatár 3.6)

A feladat

Egy váltakozó áramú generátor 0,8-as teljesítménytényező mellett 100 kilowatt hatásos teljesítményt szolgáltat. Mekkora a látszólagos és a meddő teljesítmény?



$P = 100\ \text{kW}$ $\cos\varphi = 0{,}8$

Keresett: S, Q.

Megoldás

A teljesítménytényező a hatásos és a látszólagos teljesítmény hányadosa. Ebből a látszólagos teljesítmény 100 osztva 0,8-del, vagyis 125 kilovoltamper.

EREDMÉNY $S = \frac{P}{\cos\varphi} = \frac{100\ \text{kW}}{0{,}8} = 125\ \text{kVA}$

A meddő teljesítmény a teljesítmény-háromszögből: gyök alatt 125 négyzet mínusz 100 négyzet, ami 75 kilovár.

EREDMÉNY $Q = \sqrt{S^2 - P^2} = \sqrt{125^2 - 100^2} = 75\ \text{kVAr}$

Ellenőrzésként a szinusszal is számolhatunk: a szinusz fí 0,6, és 125 szorozva 0,6 szintén 75 kilovár.

$\sin\varphi = \sqrt{1 - 0{,}8^2} = 0{,}6,\ Q = S\sin\varphi = 125 \cdot 0{,}6 = 75\ \text{kVAr}$

EZT JEGYEZD MEG!

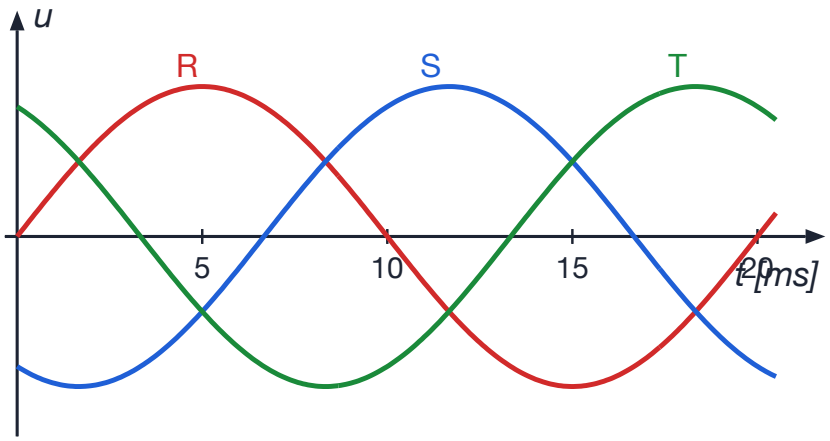
- $S = P / \cos\varphi$
- $Q = \sqrt{S^2 - P^2} = S\sin\varphi$

6. Háromfázisú rendszerek

6.1 A háromfázisú feszültség és a csillagkapcsolás

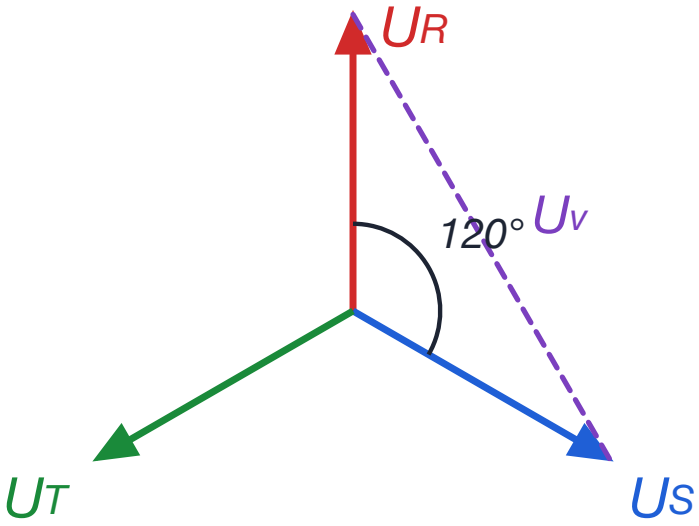
Hogyan keletkezik?

Ha egy forgó mágnes körül három, egymáshoz képest 120 fokkal elforgatott tekercset helyezünk el, mindhárom tekercsben szinuszos feszültség indukálódik.



Három, egymáshoz képest **120°-kal eltolt** szinuszos feszültség: R, S, T fázis (L1, L2, L3).

A három feszültség ugyanakkora és ugyanolyan frekvenciájú, csak időben egyharmad periódussal, vagyis 120 fokkal el vannak tolva egymáshoz képest.



BÁRMELY PILLANATBAN

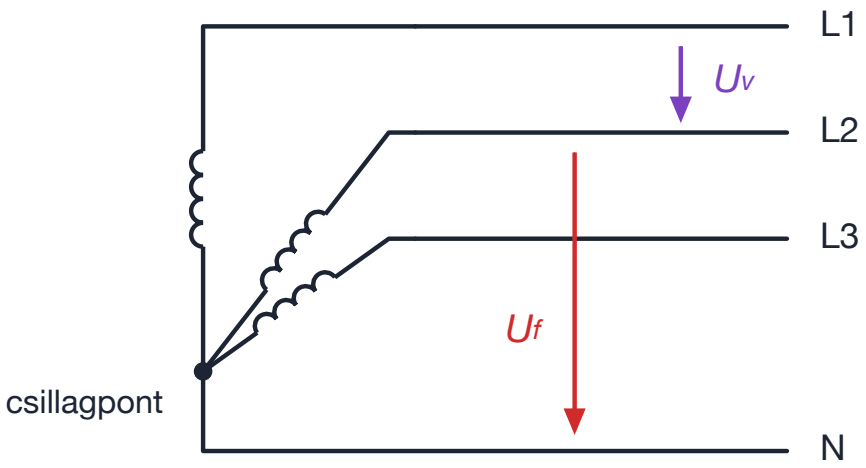
$$u_R + u_S + u_T = 0$$

Ennek fontos következménye, hogy a három feszültség pillanatértékeinek összege minden pillanatban nulla. Ezért a tekercsek összeköthetők, és nem kell hat vezeték az energiaszállításhoz.

> ℹ Két szokásos összekötés: **csillag (Y)** és **delta, háromszög (Δ)**.

Csillagkapcsolás (Y)

Csillagkapcsolásban a három tekercs végét egy közös pontba, a csillagpontba kötjük. Innen indul a nullavezető.

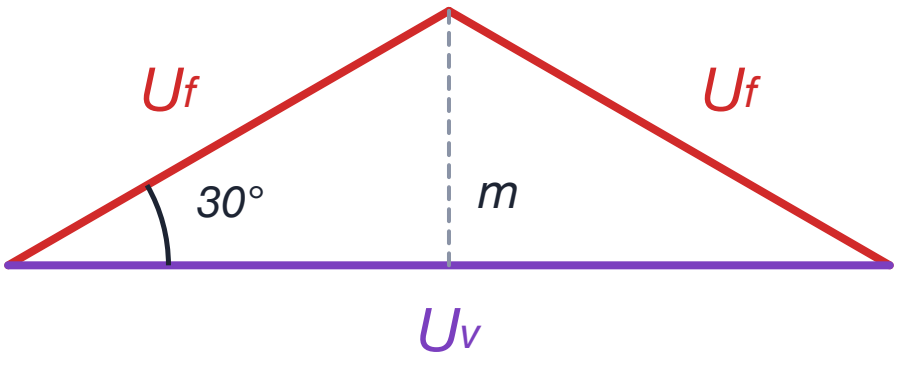


> **Csillagkapcsolás** – a tekercsvégek közös pontba (csillagpont) vannak kötve; 4 vezeték: 3 fázis + nulla.

Két feszültség vehető le. A fázisfeszültség egy fázisvezeték és a nulla között mérhető, a vonali feszültség két fázisvezeték között.

- **Fázisfeszültség** U_f: fázis – nulla között
- **Vonali feszültség** U_v: két fázis között

A vonali feszültség a két fázisfeszültség vektoros különbsége. A vektorábrából egy egyenlő szárú, 30 fokos háromszög adódik, és ebből kijön, hogy a vonali feszültség gyök háromszorosa a fázisfeszültségnek.



CSILLAG: FESZÜLTSÉG

$$U_v = \sqrt{3} \cdot U_f$$

Az áram ugyanaz a vezetékben és a tekercsben, vagyis a vonali áram egyenlő a fázisárammal.

CSILLAG: ÁRAM

$$I_v = I_f$$

A hazai hálózat ilyen: 230 voltos fázisfeszültség és 400 voltos vonali feszültség. Ez a csillagkapcsolás nagy előnye: két feszültségszint áll rendelkezésre.

$$U_v = \sqrt{3} \cdot 230\ \text{V} \approx 400\ \text{V}$$

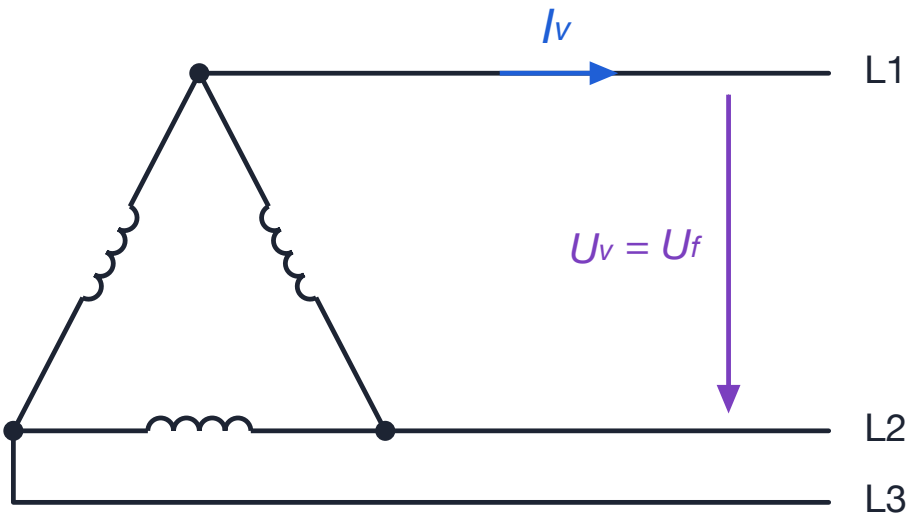
EZT JEGYEZD MEG!

- Csillag: 4 vezeték, két feszültségszint.
- $U_v = \sqrt{3}\ U_f$, $I_v = I_f$.

6.2 Deltakapcsolás

Deltakapcsolás (Δ)

Deltakapcsolásban a tekercseket sorba kötjük: mindegyik tekercs vége a következő tekercs elejéhez csatlakozik, így egy háromszög jön létre.



> **Deltakapcsolás (háromszög)** – a tekercsek körbe, sorba vannak kötve; a csúcsokból indul a 3 fázisvezeték. Nullavezető nincs.

Ez azért lehetséges, mert a három feszültség összege nulla, így a zárt körben nem folyik kiegyenlítő

áram.

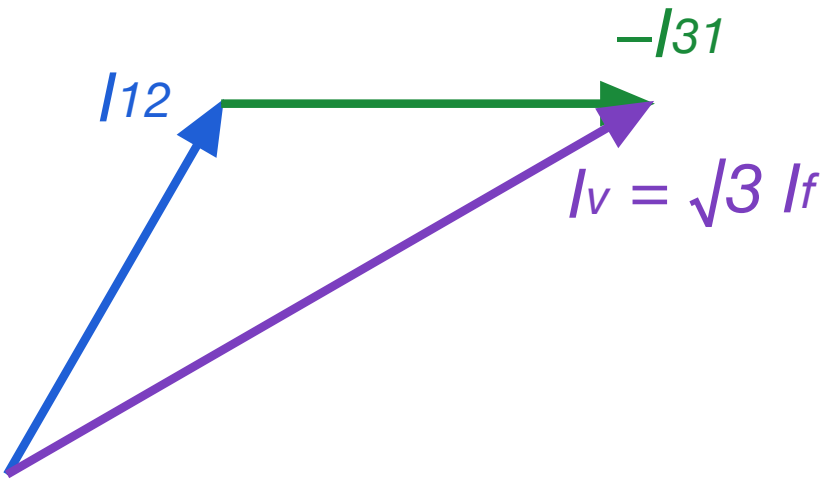
ℹ A Δ-ben körbe kötött tekercsekben nem folyik köráram, mert $u_R + u_S + u_T = 0$.

Itt minden tekercs közvetlenül két fázisvezeték közé kapcsolódik, ezért a vonali feszültség egyenlő a fázisfeszültséggel.

DELTA: FESZÜLTSÉG

$$U_v = U_f$$

Egy vezeték árama viszont két szomszédos fázisáram vektoros különbsége. Ebből a vonali áram a fázisáram gyök háromszorosa.



DELTA: ÁRAM

$$I_v = \sqrt{3} \cdot I_f$$

Deltakapcsolásban csak három vezeték kell, ami távvezetékeknél jelentős megtakarítás.

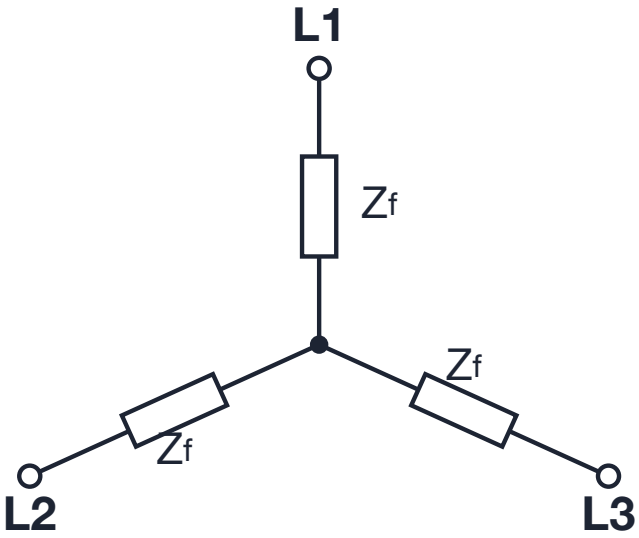
EZT JEGYEZD MEG!

- Delta: 3 vezeték, egy feszültségszint.
- $U_v = U_f$, $I_v = \sqrt{3}\ I_f$.
- Csillag: feszültségnél √3; delta: áramnál √3.

6.3 Szimmetrikus háromfázisú teljesítmény

A teljesítmény képlete

Szimmetrikus a terhelés, ha mindhárom fázisban ugyanaz az impedancia van. Ilyenek például a villamos motorok.



Szimmetrikus terhelés – mindhárom fázis impedanciája azonos (nagyság és szög), így a fázisáramok is egyformák.

A teljes teljesítmény a három fázis teljesítményének összege. Szimmetrikus esetben ez háromszor egy fázis teljesítménye.

FÁZISADATOKKAL

$$P = 3 \cdot U_f \cdot I_f \cdot \cos \varphi$$

Általában csak a vonali adatokat tudjuk mérni. Csillagkapcsolásban a fázisfeszültség a vonali osztva gyök hárommal, a fázisáram a vonali árammal egyenlő. Behelyettesítve három per gyök három, vagyis gyök három lesz a szorzó.

$$P = 3 \cdot \frac{U_v}{\sqrt{3}} \cdot I_v \cdot \cos \varphi = \sqrt{3}\, U_v\, I_v \cos \varphi$$

Deltakapcsolásban ugyanez jön ki, csak ott az áramot kell gyök hárommal osztani. Tehát a vonali adatokkal felírt képlet kapcsolástól függetlenül érvényes.

VONALI ADATOKKAL (Y ÉS Δ)

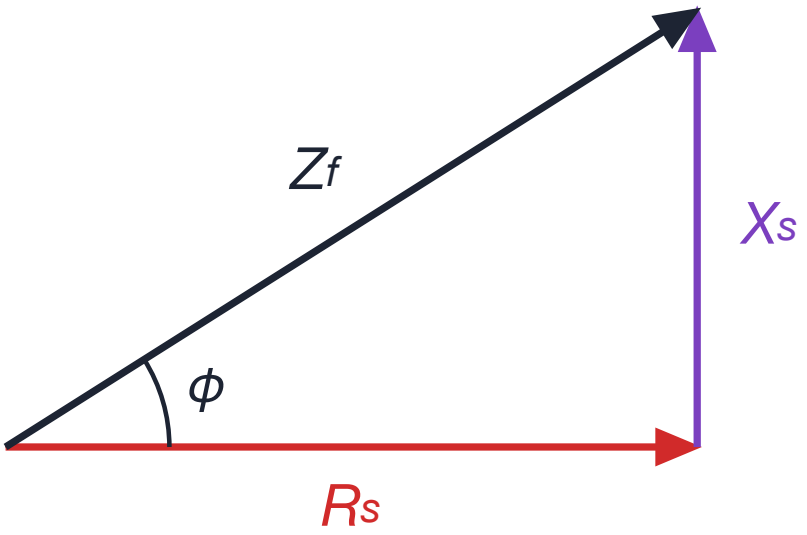
$$P = \sqrt{3}\, U_v\, I_v \cos \varphi,\ Q = \sqrt{3}\, U_v\, I_v \sin \varphi,\ S = \sqrt{3}\, U_v\, I_v$$

Fontos: a φ mindig a fázisfeszültség és a fázisáram közötti szög, vagyis a fázisimpedancia szöge.

⚠ φ = a fázisimpedancia szöge (U_f és I_f között).

A fázisimpedancia és helyettesítése

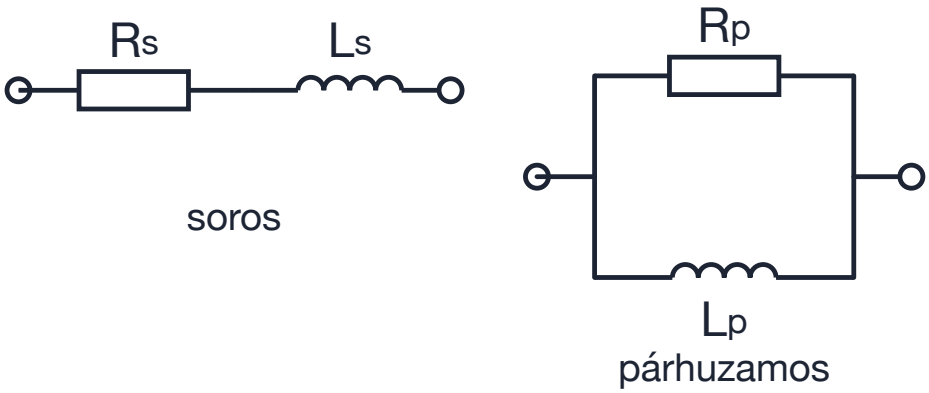
Egy fázis impedanciája a fázisfeszültség osztva a fázisárammal.



FÁZISIMPEDANCIA

$$Z_f = \frac{U_f}{I_f}$$

Ez helyettesíthető egy sorba kötött ellenállással és reaktanciával. Az impedancia-háromszögből az ellenállás Z szorozva koszinusz fí, a reaktancia Z szorozva szinusz fí.



SOROS HELYETTESÍTÉS

$$R_s = Z_f \cos \varphi,\ X_s = Z_f \sin \varphi$$

Vagy helyettesíthető egy párhuzamos ellenállással és reaktanciával. Ekkor az ellenállás Z osztva koszinusz fível, a reaktancia Z osztva szinusz fível.

PÁRHUZAMOS HELYETTESÍTÉS

$$R_p = \frac{Z_f}{\cos \varphi},\ X_p = \frac{Z_f}{\sin \varphi}$$

A reaktanciából az induktivitás: X osztva omegával. Az órán elhangzott, hogy az eredményt 1 és

1000 közötti számmal és prefixummal adjuk meg, például millihenriben.

$$L = \frac{X}{\omega} = \frac{X}{2\pi f}$$

EZT JEGYEZD MEG!

- $P = \sqrt{3}\, U_v\, I_v \cos\varphi$ – Y-ban és Δ-ban is.
- Soros: $Z\cos\varphi$, $Z\sin\varphi$. Párhuzamos: $Z/\cos\varphi$, $Z/\sin\varphi$.

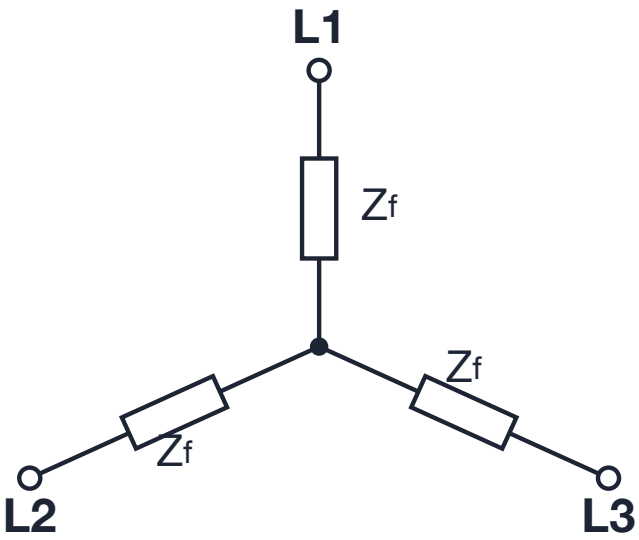
Képletkártya

Csillag (Y)	$U_v = \sqrt{3}\, U_f,\ I_v = I_f$
Delta (Δ)	$U_v = U_f,\ I_v = \sqrt{3}\, I_f$
Hatásos teljesítmény	$P = 3\, U_f\, I_f \cos\varphi = \sqrt{3}\, U_v\, I_v \cos\varphi$
Meddő teljesítmény	$Q = \sqrt{3}\, U_v\, I_v \sin\varphi$
Látszólagos teljesítmény	$S = \sqrt{3}\, U_v\, I_v = 3\, U_f\, I_f$
Fázisimpedancia	$Z_f = \frac{U_f}{I_f}$
Soros helyettesítés	$R_s = Z_f \cos\varphi,\ X_s = Z_f \sin\varphi$
Párhuzamos helyettesítés	$R_p = \frac{Z_f}{\cos\varphi},\ X_p = \frac{Z_f}{\sin\varphi}$
Induktivitás a reaktanciából	$L = \frac{X}{\omega} = \frac{X}{2\,\pi\,f}$

Mintafeladat: csillagkapcsolású motor (Példatár 5.1)

A feladat

Egy háromfázisú, csillagkapcsolású motor adattábláján ezek szerepelnek: 380 volt, 20 amper, a teljesítménytényező 0,715, a hatásfok 85 százalék.



$U_v = 380\ V$ $I_v = 20\ A$ $\cos\varphi = 0{,}715$ $\eta = 85\ \%$

Mekkora a motor hasznos teljesítménye, a fázisfeszültsége és a fázisárama?

Keresett: P_h, U_f, I_f. (Az adattáblán mindig vonali adatok szerepelnek.)

Megoldás

A hálózatból felvett hatásos teljesítmény gyök három szorozva 380 volttal, 20 amperrel és 0,715-tel, ami 9412 watt.

$$P_l = \sqrt{3}\, U_v\, I_v \cos\varphi = \sqrt{3} \cdot 380 \cdot 20 \cdot 0{,}715 = 9412\ W$$

A hasznos teljesítmény ennek 85 százaléka: körülbelül 8000 watt, vagyis 8 kilowatt.

EREDMÉNY $P_h = \eta \cdot P_l = 0{,}85 \cdot 9412\ W = 8000\ W = 8\ kW$

A példatárban itt 8022 watt szerepel. Ez azért van, mert ott a fázisfeszültséget 220 voltra kerekítve számolták. Pontos értékekkel 8000 watt jön ki, az eltérés csak kerekítés.

✎ A példatárban „8022 W” áll: ez akkor jön ki, ha a kerekített 220 V-os fázisfeszültséggel számolunk (3 · 220 · 20 · 0,715 · 0,85 = 8022 W). Pontosan (380/√3 = 219,4 V-tal) az eredmény **8000 W** – az eltérés csak kerekítés.

Csillagkapcsolásban a fázisáram egyenlő a vonali árammal, a fázisfeszültség pedig a vonali osztva gyök hárommal: 219,4, kerekítve 220 volt.

EREDMÉNY $I_f = I_v = 20\ A,\ U_f = \frac{380\ V}{\sqrt{3}} = 219{,}4\ V \approx 220\ V$

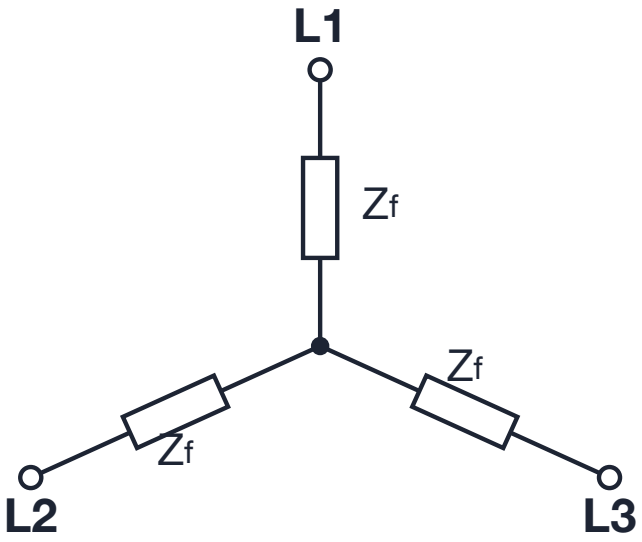
EZT JEGYEZD MEG!

- Adattábla: vonali adatok.
- Hasznos teljesítmény = hatásfok · felvett teljesítmény.

Mintafeladat: szimmetrikus csillag fogyasztó (Órai feladat (Példatár 5.4, 400 V-tal))

A feladat

Az órai feladat: egy szimmetrikus, csillagkapcsolású fogyasztó látszólagos teljesítménye 9 kilovoltamper, a vonali feszültség 400 volt, a teljesítménytényező 0,8, induktív.



$S = 9\ \text{kVA}$ $U_v = 400\ \text{V}$ $\cos\varphi = 0{,}8\ \text{(ind.)}$ $f = 50\ \text{Hz}$

Számoljuk ki a fázisfeszültséget, a vonali és fázisáramot, a teljesítményeket, a fázisimpedanciát, és a fázisimpedancia soros és párhuzamos helyettesítését!

Keresett: U_f, I_v, I_f, P, Q, P_f, Z_f, R_s, L_s, R_p, L_p.

1. Feszültség, áram, teljesítmény

A fázisfeszültség 400 osztva gyök hárommal, vagyis 230,9 volt.

$$U_f = \frac{U_v}{\sqrt{3}} = \frac{400}{\sqrt{3}} = 230{,}9\ \text{V}$$

A vonali áram a látszólagos teljesítményből: 9000 osztva gyök három szorozva 400-zal, ami 12,99 amper. Csillagban ez a fázisáram is.

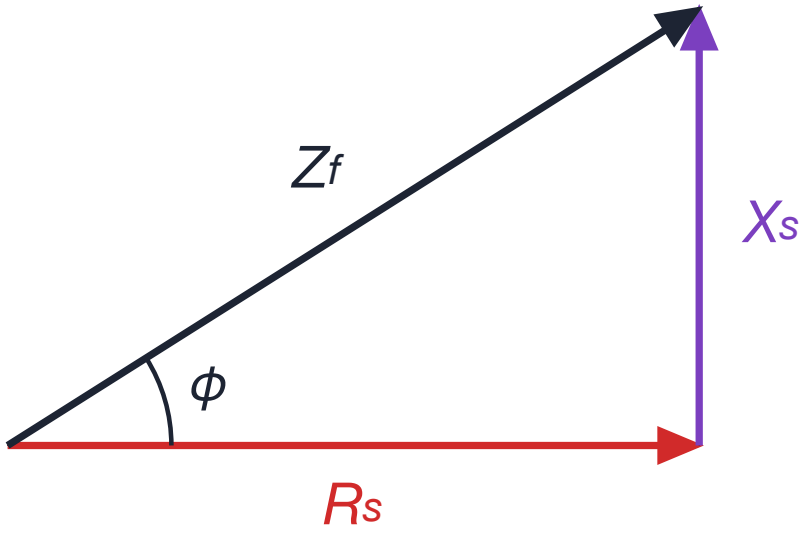
EREDMÉNY $$I_v = I_f = \frac{S}{\sqrt{3}\ U_v} = \frac{9000}{\sqrt{3}\cdot 400} = 12{,}99\ \text{A}$$

A hatásos teljesítmény 9000 szorozva 0,8, vagyis 7,2 kilowatt. Egy fázisra ennek harmada, 2,4 kilowatt jut. A meddő teljesítmény 9000 szorozva 0,6, vagyis 5,4 kilovár.

$$P = S\cos\varphi = 7{,}2\ \text{kW},\ P_f = \frac{P}{3} = 2{,}4\ \text{kW},\ Q = S\sin\varphi = 5{,}4\ \text{kVAr}$$

2. Fázisimpedancia és helyettesítések

A fázisimpedancia 230,9 volt osztva 12,99 amperrel, vagyis 17,78 ohm. A fázisszög koszinusz fí egyenlő 0,8-ból 36,87 fok, a szinusza 0,6.



$$Z_f = \frac{U_f}{I_f} = \frac{230{,}9}{12{,}99} = 17{,}78\ \Omega,\ \varphi = 36{,}87°$$

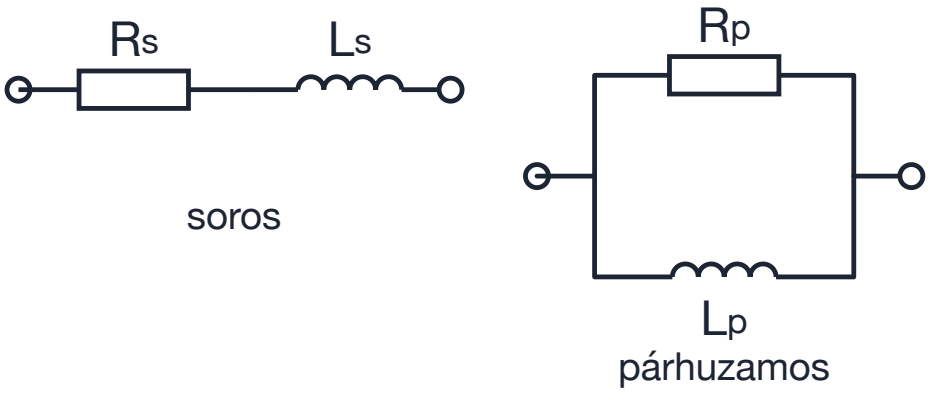
Eltérés az órai jegyzettől

Figyelem: az órai jegyzetben a szög elírással 37,69 fok, ezért ott a reaktancia és az induktivitás kissé eltér. A helyes szög 36,87 fok.

> ✎ Jegyzet: „cos ϕ = 0,8 → ϕ = 37,69°”, ebből „X_s = 9,87 Ω, L = 31 mH”. De arccos 0,8 = **36,87°** (sin ϕ = 0,6) – a példatár 5.4 megoldása is sin ϕ = 0,6-tal számol. A jegyzet kerekített Z_f = 230 V / 13 A = 17,69 Ω-jával: X_s = 10,61 Ω, L = 33,8 mH; pontos értékekkel (17,78 Ω): X_s = 10,67 Ω, L_s = 33,95 mH. (R_s = 14,15 Ω a jegyzetben csak a kerekítés miatt tér el a 14,22 Ω-tól.)

3. Soros és párhuzamos helyettesítés

Soros helyettesítés: az ellenállás 17,78 szorozva 0,8, vagyis 14,22 ohm. A reaktancia 17,78 szorozva 0,6, vagyis 10,67 ohm, ebből az induktivitás 33,95 millihenri.



EREDMÉNY $R_s = 14{,}22\ \Omega,\ X_s = 10{,}67\ \Omega,\ L_s = \frac{10{,}67}{314{,}16} = 33{,}95\ \text{mH}$

Párhuzamos helyettesítés: az ellenállás 17,78 osztva 0,8-del, vagyis 22,22 ohm. A reaktancia 17,78 osztva 0,6-del, vagyis 29,63 ohm, az induktivitás 94,31 millihenri.

EREDMÉNY $R_p = 22{,}22\ \Omega,\ X_p = 29{,}63\ \Omega,\ L_p = \frac{29{,}63}{314{,}16} = 94{,}31\ \text{mH}$

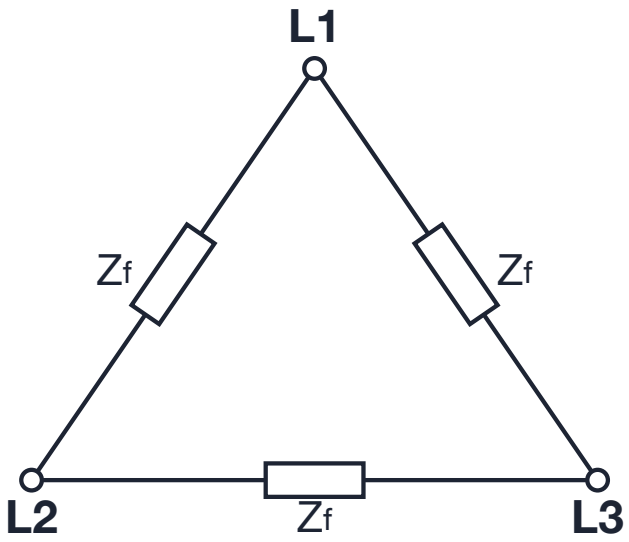
EZT JEGYEZD MEG!

- Csillag: $I_f = I_v$, $U_f = U_v/\sqrt{3}$.
- cos φ = 0,8 → φ = 36,87°, sin φ = 0,6.

Mintafeladat: szimmetrikus delta fogyasztó (Órai feladat (8 pontos ZH-feladat))

A feladat

Ez az órán bemutatott, 8 pontos zárthelyi feladat. Egy szimmetrikus, deltakapcsolású fogyasztó fázisimpedanciája 40 plusz j30 ohm, a vonali feszültség 400 volt.



$\underline{Z}_f = (40 + j30)\ \Omega$ $U_v = 400\ V$ Δ kapcsolás

Határozzuk meg a fázis- és vonali feszültséget és áramot, a teljesítménytényezőt, egy fázis teljesítményét, valamint a teljes hatásos, látszólagos és meddő teljesítményt!

Keresett: U_f, I_f, I_v, cos ϕ, P_f, P, S, Q.

1. Impedancia, feszültség, áram

Az impedancia nagysága gyök alatt 40 négyzet plusz 30 négyzet, vagyis 50 ohm. A szöge 30 per 40 arkusz tangense, 36,87 fok.

$$Z_f = \sqrt{40^2 + 30^2} = 50\ \Omega,\ \varphi = \operatorname{arctg}\frac{30}{40} = 36{,}87°$$

Deltában a fázisfeszültség egyenlő a vonali feszültséggel: 400 volt.

$$U_f = U_v = 400\ V$$

A fázisáram 400 volt osztva 50 ohmmal, vagyis 8 amper. A vonali áram ennek gyök háromszorosa, 13,86 amper.

EREDMÉNY $I_f = \frac{400\ V}{50\ \Omega} = 8\ A,\ I_v = \sqrt{3} \cdot 8\ A = 13{,}86\ A$

2. Teljesítmények

A teljesítménytényező koszinusz 36,87 fok, vagyis 0,8. Ugyanezt kapjuk, ha az ellenállást osztjuk az impedanciával: 40 per 50.

EREDMÉNY $\cos\varphi = \frac{R}{Z} = \frac{40}{50} = 0{,}8$

Egy fázis hatásos teljesítménye 400 szorozva 8 szorozva 0,8, vagyis 2560 watt.

$$P_f = U_f I_f \cos \varphi = 400 \cdot 8 \cdot 0{,}8 = 2560 \text{ W}$$

A teljes hatásos teljesítmény ennek háromszorosa: 7680 watt. Ugyanez jön ki a vonali adatokkal is: gyök három szorozva 400-zal, 13,86-tal és 0,8-del.

EREDMÉNY $P = 3 P_f = \sqrt{3} \cdot 400 \cdot 13{,}86 \cdot 0{,}8 = 7680 \text{ W}$

A látszólagos teljesítmény 9600 voltamper, a meddő teljesítmény 9600 szorozva 0,6, vagyis 5760 vár.

EREDMÉNY $S = \sqrt{3}\, U_v\, I_v = 9600 \text{ VA}, Q = S \sin \varphi = 5760 \text{ VAr}$

Ellenőrzés: 3 szorozva 8 amper négyzetével és 40 ohmmal szintén 7680 watt. Az órai jegyzetben 7676 watt szerepel, ez csak kerekítés.

$$P = 3 I_f^2 R = 3 \cdot 64 \cdot 40 = 7680 \text{ W}$$

EZT JEGYEZD MEG!

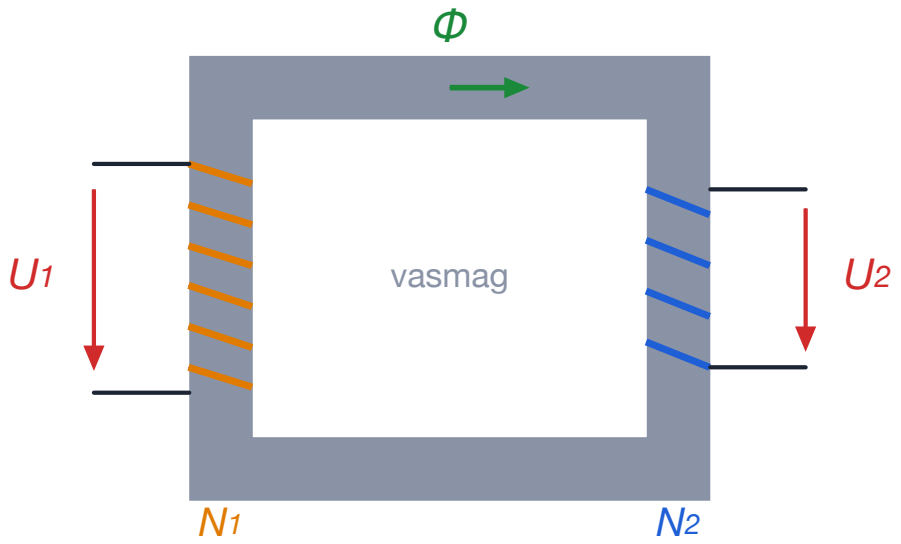
- Delta: $U_f = U_v$, $I_v = \sqrt{3}\, I_f$.
- Ellenőrzés: $P = 3 I_f^2 R$.

7. Transzformátor

7.1 Működési elv és főegyenlet

Hogyan működik?

A transzformátor egy közös vasmagra tekercselt két tekercsből áll. A primer tekercsre kapcsoljuk a váltakozó feszültséget, a szekunder tekercsről vesszük le az átalakított feszültséget.



> **Transzformátor** – nyugalmi indukción alapuló gép, amely a váltakozó feszültséget és áramot azonos frekvencián átalakítja.

A primer tekercs váltakozó árama a vasmagban váltakozó fluxust hoz létre. Ez a fluxus a szekunder tekercsen is áthalad, és abban feszültséget indukál.

1. U_1 → primer áram
2. → váltakozó fluxus Φ a vasmagban
3. → indukált feszültség a szekunder tekercsben

Egyenfeszültséggel nem működik, mert állandó áramnál a fluxus nem változik, így nincs indukció.

⚠ A transzformátor csak **váltakozó** feszültséggel működik.

A főegyenlet és az áttétel

Szinuszos fluxusnál az indukált feszültség effektív értéke a transzformátor főegyenlete: 4,44 szorozva a frekvenciával, a menetszámmal és a fluxus csúcsértékével.

FŐEGYENLET

$$U_i = \frac{2\pi}{\sqrt{2}} \cdot f \cdot N \cdot \Phi_{max} = 4{,}44 \cdot f \cdot N \cdot \Phi_{max}$$

Mivel mindkét tekercset ugyanaz a fluxus járja át, a feszültségek úgy aránylanak, mint a menetszámok. Ezt az arányt nevezzük menetszám-áttételnek.

MENETSZÁM-ÁTTÉTEL

$$a = \frac{N_1}{N_2} = \frac{U_1}{U_2}$$

A teljesítmény a két oldalon közel azonos, ezért az áramok fordítottan aránylanak: ahol nagyobb a feszültség, ott kisebb az áram.

$$U_1 I_1 \approx U_2 I_2 \rightarrow \frac{I_1}{I_2} = \frac{N_2}{N_1} = \frac{1}{a}$$

Példa: 230 voltról 23 voltra kell letranszformálni. Az áttétel 10, tehát a primer tekercsnek tízszer annyi menete van.

$$a = \frac{230\ V}{23\ V} = 10$$

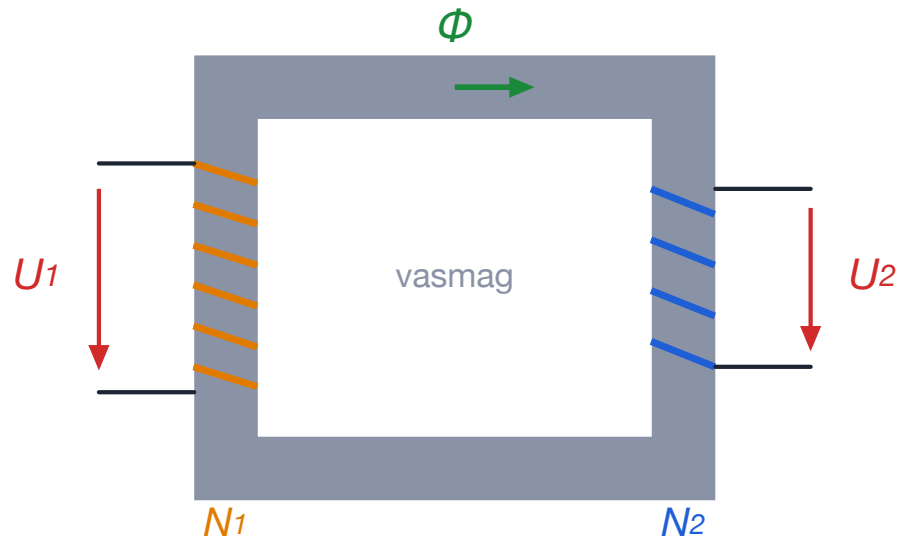
EZT JEGYEZD MEG!

- $U_i = 4{,}44\ f\ N\ \Phi_{max}$
- $a = N_1/N_2 = U_1/U_2 = I_2/I_1$

7.2 Impedancia-transzformáció és helyettesítő kép

Impedancia-transzformáció

Ha a szekunder oldalra egy Z2 impedanciát kötünk, a generátor a primer oldalon egy egészen más impedanciát lát.



$$Z_1 = \frac{U_1}{I_1}, Z_2 = \frac{U_2}{I_2}$$

A primer impedancia a feszültség- és az áramáttétel szorzata miatt az áttétel négyzetével szorzódik.

$$\frac{Z_1}{Z_2} = \frac{U_1}{U_2} \cdot \frac{I_2}{I_1} = a \cdot a = a^2$$

IMPEDANCIA-TRANSZFORMÁCIÓ

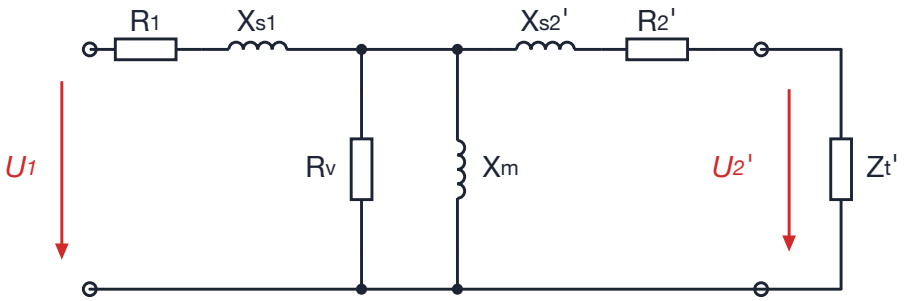
$$Z_1 = a^2 \cdot Z_2$$

Ezt használják illesztésre: ha a generátor belső ellenállása eltér a terheléstől, egy megfelelő áttételű transzformátorral a kettő illeszthető, és a legnagyobb teljesítmény vihető át.

$$a = \sqrt{\frac{Z_1}{Z_2}}$$

Helyettesítő kapcsolás

A valóságos transzformátorban veszteségek is vannak. Ezeket a helyettesítő kapcsolás modellezi.



R1 és R2 a tekercsek ellenállása, Xs1 és Xs2 a szórási reaktancia, vagyis a vason kívül záródó fluxus hatása. Rv a vasveszteséget, Xm a főfluxust jelképezi.

Elem	Jelentése
R_1, R_2	primer és szekunder tekercs ohmos ellenállása
X_{s1}, X_{s2}	primer és szekunder szórási reaktancia
R_v (R_0)	a vasveszteséget jelképező ellenállás
X_m (X_0)	a főfluxust jelképező reaktancia

Redukció a primer oldalra

Hogy a két oldal egy áramkörként rajzolható legyen, a szekunder mennyiségeket átszámítjuk a primer oldalra. Ezt nevezzük redukciónak, és vesszővel jelöljük.

FESZÜLTSÉG

$$U_2' = a \cdot U_2$$

ÁRAM

$$I_2' = \frac{I_2}{a}$$

IMPEDANCIA

$$R_2' = a^2 R_2,\ X_{s2}' = a^2 X_{s2}$$

A feszültséget az áttétellel szorozzuk, az áramot osztjuk, az impedanciákat az áttétel négyzetével szorozzuk. Így a teljesítmény változatlan marad.

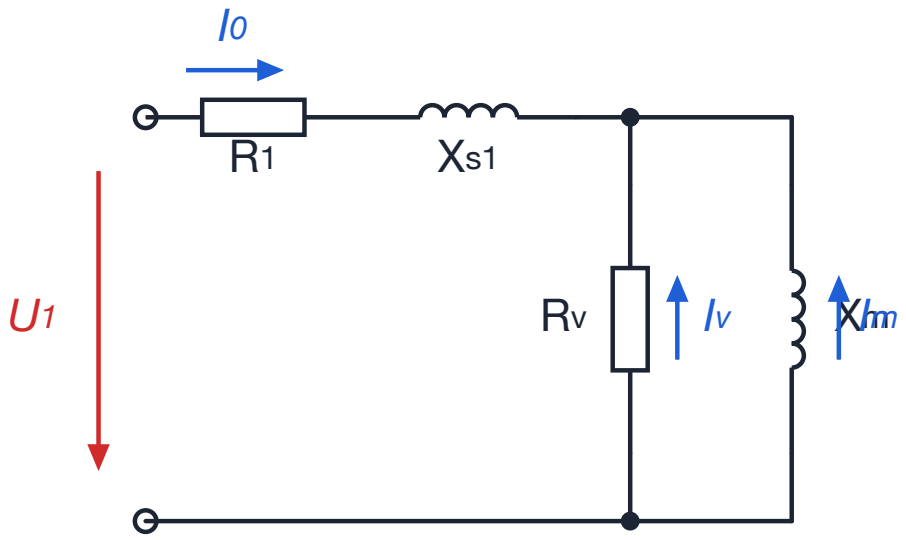
EZT JEGYEZD MEG!

- Feszültség: szorozva a-val. Áram: osztva a-val. Impedancia: szorozva a²-tel.
- A helyettesítő kép: R_1, X_{s1}, $R_v \times X_m$, X_{s2}', R_2'.

7.3 Üresjárás és rövidzárás

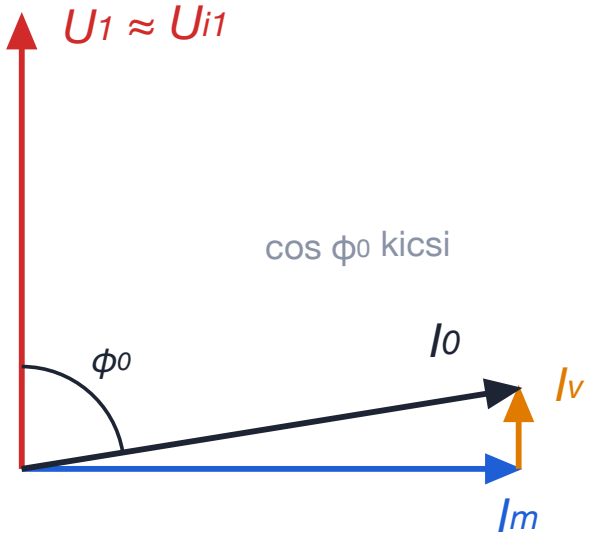
Üresjárási állapot

Üresjárásban a szekunder kapcsok szabadok, nem folyik szekunder áram. A primer oldalon csak egy kis üresjárási áram folyik.



$I_2 = 0$ – a helyettesítő képből csak R_1, X_{s1} és az $R_v \times X_m$ ág marad.

Az üresjárási áram két részből áll: a mágnesező áramból, amely a fluxust hozza létre, és egy kis veszteségi áramból, amely a vasveszteséget fedezi.



$$\bar{I}_0 = \bar{I}_m + \bar{I}_v$$

A mágnesező áram 90 fokot késik a feszültséghez képest, és ez a nagyobb rész. Ezért a teljesítménytényező üresjárásban nagyon kicsi, körülbelül 0,16.

ℹ Üresjárásban $\cos \phi_0 \approx 0{,}16$ – az áram főleg mágnesező (meddő) áram.

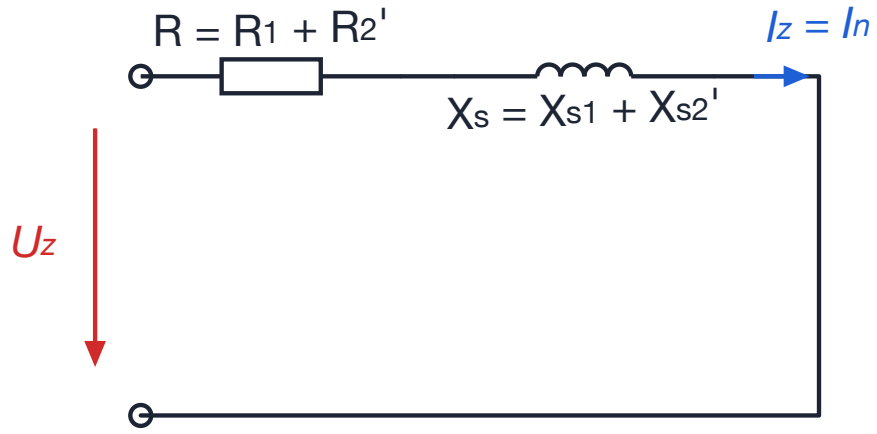
Az üresjárásban felvett hatásos teljesítmény gyakorlatilag a vasveszteség. Ezért az üresjárási méréssel a vasveszteséget mérjük meg.

EZT JEGYEZD MEG!

- Üresjárás: kis I_0, kis $\cos \phi_0$.
- Felvett teljesítmény ≈ vasveszteség.

Rövidzárási állapot

Rövidzárásban a szekunder kapcsokat rövidre zárjuk, és a primer feszültséget addig növeljük, amíg a névleges áram folyik. Ez a feszültség a rövidzárási feszültség.



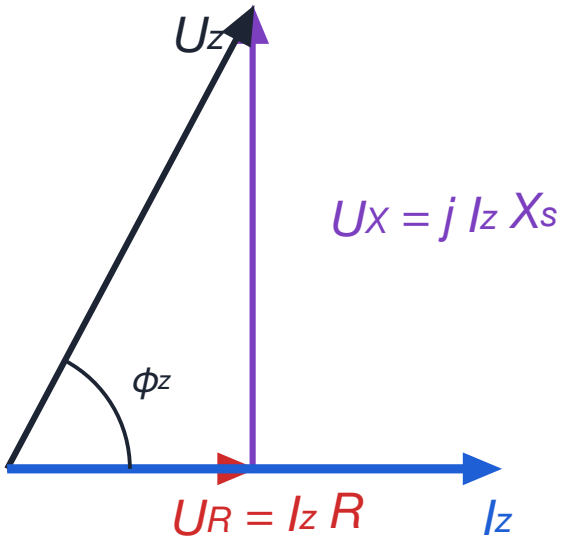
> **Rövidzárási feszültség (U_{1z})** – az a primer feszültség, amelynél rövidre zárt szekunder mellett a névleges áram folyik.

A névleges feszültség százalékában kifejezve ez a drop, jele epszilon. Értéke általában néhány százalék.

DROP

$$\varepsilon = \frac{U_{1z}}{U_{1n}} \cdot 100\ \%$$

Mivel ekkor kicsi a feszültség, a vasveszteség elhanyagolható, és a helyettesítő képből csak a soros ellenállás és szórási reaktancia marad.



$$R = R_1 + R_2', X_s = X_{s1} + X_{s2}'$$

A rövidzárási teljesítménytényező az ellenálláson és a teljes impedancián eső feszültség hányadosa. Értéke körülbelül 0,4–0,5. A rövidzárási méréssel a tekercsveszteséget mérjük.

RÖVIDZÁRÁSI TELJESÍTMÉNYTÉNYEZŐ

$$\cos \varphi_z = \frac{U_R}{U_Z}$$

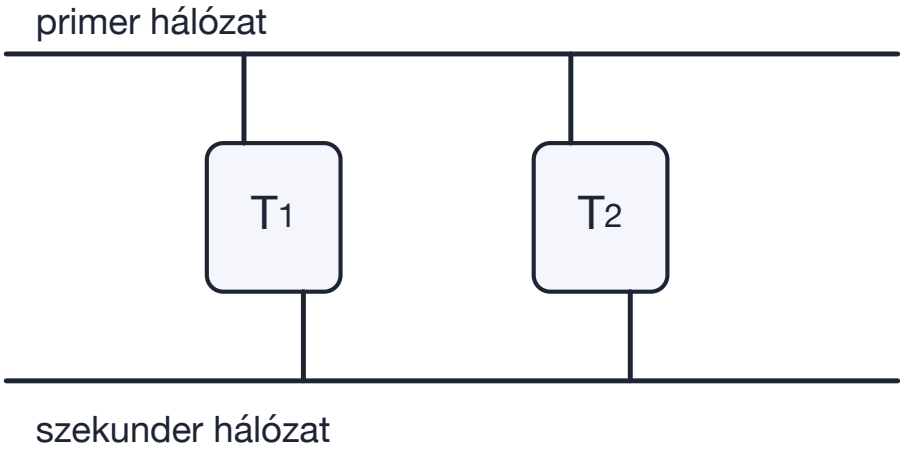
Ha üzem közben zárlat lép fel teljes feszültségen, a zárlati áram a névleges áram 100 per epszilon-szorosa lehet. Például 5 százalékos dropnál hússzoros.

$$I_z = I_{1n} \frac{100}{\varepsilon} \rightarrow \varepsilon = 5\ \%: I_z = 20\ I_{1n}$$

7.4 Párhuzamos üzem és kapcsolási csoportok

Párhuzamos üzem

Ha egy transzformátor nem elég, többet kapcsolnak párhuzamosan. Ehhez két dolognak kell teljesülnie: ne folyjon kiegyenlítő áram a transzformátorok között, és a terhelés a névleges teljesítményük arányában oszoljon meg.



- nincs kiegyenlítő áram
- a terhelés a névleges teljesítmények arányában oszlik meg

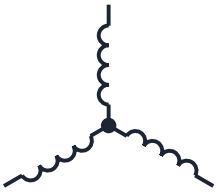
Ez akkor teljesül, ha a primer és szekunder névleges feszültségek, vagyis az áttételek megegyeznek, a kapcsolási csoport azonos, és a dropok egyenlők.

FELTÉTELEK

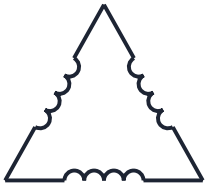
$$a_1 = a_2, \text{ azonos kapcsolási csoport, } \varepsilon_1 = \varepsilon_2$$

Kapcsolási csoportok

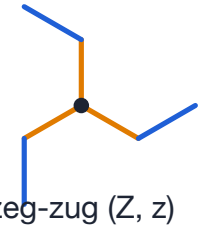
Háromfázisú transzformátornál a tekercsek csillagba, deltába vagy zeg-zug kapcsolásba köthetők.



csillag (Y, y)



delta (D, d)



zeg-zug (Z, z)

A jelölésben a nagy betű a nagyfeszültségű, a kis betű a kisfeszültségű oldalt jelenti, a szám pedig a két oldal közötti fáziseltolást adja meg 30 fokos egységekben, mint egy óra számlapján.

Jelölés	Jelentés
Dy5	primer delta, szekunder csillag, fáziseltolás 5 · 30° = 150°
Yy0	mindkét oldal csillag, 0° eltolás
Dyn5	mint Dy5, kivezetett szekunder csillagponttal (n)

EZT JEGYEZD MEG!

- Párhuzamos üzem: azonos áttétel, azonos kapcsolási csoport, azonos drop.
- Kapcsolások: Y, D, Z (zeg-zug).

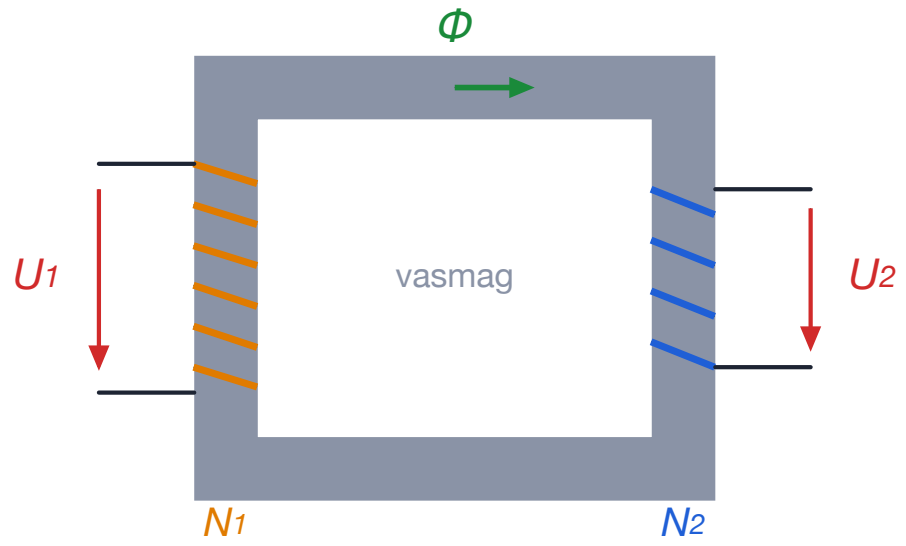
Képletkártya

Főegyenlet	$U_i = \frac{2\pi}{\sqrt{2}} f N \Phi_{max} = 4{,}44 \cdot f \cdot N \cdot \Phi_{max}$
Menetszám-áttétel	$a = \frac{N_1}{N_2} = \frac{U_1}{U_2} = \frac{I_2}{I_1}$
Impedancia-transzformáció	$Z_1 = a^2 \cdot Z_2,\ a = \sqrt{\frac{Z_1}{Z_2}}$
Redukció	$U_2' = a\,U_2,\ I_2' = \frac{I_2}{a},\ R_2' = a^2\,R_2,\ X_{s2}' = a^2\,X_{s2}$
Drop (rövidzárási feszültség)	$\varepsilon = \frac{U_{1z}}{U_{1n}} \cdot 100\ \%$
Rövidzárási teljesítménytényező	$\cos\varphi_z = \frac{U_R}{U_Z} = \frac{P_z}{S_z}$
Zárlati áram	$I_z = I_{1n} \cdot \frac{100}{\varepsilon}$
Rövidzárási helyettesítés	$R = R_1 + R_2',\ X_s = X_{s1} + X_{s2}'$

Mintafeladat: háromfázisú Dy transzformátor (Órai feladat)

A feladat

Egy háromfázisú, Dy kapcsolású transzformátor adatai: 400 voltról 120 voltra transzformál, névleges teljesítménye 1,8 kilovoltamper, a dropja 6,5 százalék, a frekvencia 50 hertz.



Dy | $U_{1n} = 400\ V$ | $U_{2n} = 120\ V$ | $S_n = 1{,}8\ kVA$ | $\varepsilon = 6{,}5\ \%$

$\Phi_{max} = 1\ mWb$ | $P_z = 40\ W$ | $R_l = 3{,}1\ \Omega$

Számoljuk ki a névleges áramokat, az áttételt, a menetszámokat, a rövidzárási feszültséget, a rövidzárási impedanciát és a szekunder tekercs ellenállását!

> ★ Az órán elhangzott: a ZH-ban transzformátor-számítás **nem lesz**, csak elmélet. Ez a feladat a megértést segíti.

1. Áramok és áttétel

A feszültségek vonali értékek. A primer oldal delta, ezért ott a fázisfeszültség 400 volt. A szekunder csillag, ott a fázisfeszültség 120 osztva gyök hárommal, 69,28 volt.

$$U_{1f} = 400\ V,\ U_{2f} = \frac{120}{\sqrt{3}} = 69{,}28\ V$$

A névleges vonali áramok a teljesítményből: a primer oldalon 2,598 amper, a szekunder oldalon 8,66 amper. A delta primer tekercsben ennek a gyök harmada, 1,5 amper folyik.

$$I_{1n} = \frac{S_n}{\sqrt{3}\ U_{1n}} = \frac{1800}{\sqrt{3} \cdot 400} = 2{,}598\ A$$

$$I_{2n} = \frac{S_n}{\sqrt{3}\ U_{2n}} = 8{,}66\ A$$

$$I_{1f} = \frac{I_{1n}}{\sqrt{3}} = 1{,}5\ \text{A}$$

A menetszám-áttétel a fázisfeszültségek hányadosa: 400 osztva 69,28-cal, vagyis 5,774.

EREDMÉNY $$a = \frac{U_{1f}}{U_{2f}} = \frac{400}{69{,}28} = 5{,}774$$

2. Menetszámok és rövidzárási feszültség

A menetszámok a főegyenletből jönnek. A primer menetszám 400 osztva 4,44 szorozva 50 szorozva 0,001-gyel, vagyis 1802 menet.

EREDMÉNY $$N_1 = \frac{U_{1f}}{4{,}44\ f\ \Phi_{max}} = \frac{400}{4{,}44 \cdot 50 \cdot 0{,}001} = 1802$$

A szekunder menetszám ugyanígy, a szekunder fázisfeszültségből: 312 menet.

EREDMÉNY $$N_2 = \frac{69{,}28}{0{,}222} = 312$$

A rövidzárási feszültség a névleges feszültség 6,5 százaléka: 26 volt.

EREDMÉNY $$U_{1z} = \frac{\varepsilon}{100}\ U_{1n} = 0{,}065 \cdot 400\ \text{V} = 26\ \text{V}$$

3. Rövidzárási impedancia és R_2

A rövidzárási impedanciát egy fázisra számoljuk. A delta primer tekercsen 26 volt van, és 1,5 amper folyik, így az impedancia 17,33 ohm.

EREDMÉNY $$Z_z = \frac{U_{1z}}{I_{1f}} = \frac{26\ \text{V}}{1{,}5\ \text{A}} = 17{,}33\ \Omega$$

Az órai jegyzetben itt 26 per 2,59, vagyis 10 ohm szerepel. Ez vonali árammal számolt érték, delta kapcsolásnál viszont a fázisárammal kell osztani. A jegyzet a következő lépésben, az ellenállásnál, maga is a fázisárammal számol, és a tanár példatárának 6.6-os feladata is így teszi.

✎ Jegyzet: „Z_z = 26 V / 2,59 A = 10 Ω” – itt a vonali áram szerepel, de Δ primernél a fázisimpedanciát a **fázisárammal** kell számolni: 26 / 1,5 = 17,33 Ω. A jegyzet a következő lépésben (R) már fázisárammal számol, és csak 17,33 Ω-mal teljesül $Z_z \cdot \cos\varphi_z = R$; a példatár 6.6 feladata is így számol ($Z = U_{1f}/I_{1f} = 395/(15/\sqrt{3}) = 45{,}6$ Ω).

4. Ellenállások: R és R_2

A rövidzárási mérésnél 40 watt teljesítményt mértünk, ez a három fázis tekercsvesztesége. Egy fázisra az ellenállás 40 osztva 3 szorozva 1,5 négyzetével, vagyis 5,926 ohm.

$$R = \frac{P_z}{3\,I_{1f}^{\,2}} = \frac{40}{3 \cdot 1{,}5^2} = 5{,}926\ \Omega,\ \cos\varphi_z = \frac{R}{Z_z} = 0{,}342$$

Ebből a primer ellenállást, 3,1 ohmot levonva a redukált szekunder ellenállás 2,826 ohm. Ezt az áttétel négyzetével osztva a szekunder ellenállás 84,8 milliohm.

EREDMÉNY $R_2' = R - R_1 = 2{,}826\ \Omega,\ R_2 = \frac{R_2'}{a^2} = \frac{2{,}826}{5{,}774^2} = 84{,}8\ \text{m}\Omega$

A jegyzetben 86 milliohm szerepel, mert ott az áramot 2,59 amperre kerekítve számolták. Ez kerekítés, nem hiba. Pontos értékekkel 84,8 milliohm jön ki.

✎ A jegyzetben R = 5,96 Ω és R_2 = 86 mΩ áll, mert ott a 2,598 A-t 2,59 A-re kerekítve számolták. Ez kerekítés, nem hiba; pontos értékekkel R = 5,926 Ω, R_2 = 84,8 mΩ.

EZT JEGYEZD MEG!

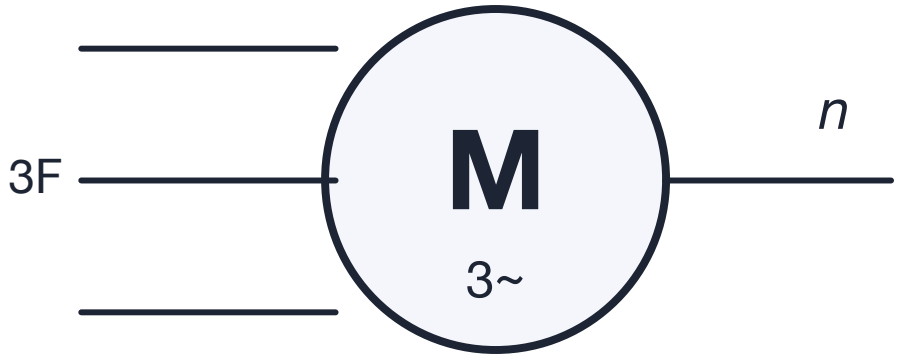
- Δ oldalon: $U_f = U_v$, $I_f = I_v/\sqrt{3}$; Y oldalon: $U_f = U_v/\sqrt{3}$.
- Impedanciát mindig fázisértékekkel számolunk.

8. Aszinkron gép

8.1 Felépítés és működési elv

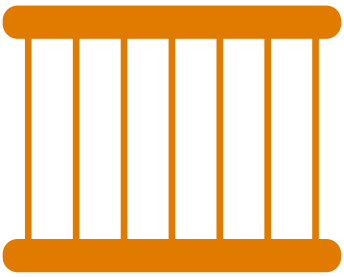
Az aszinkron gép részei

Az aszinkron gép a legelterjedtebb villamos motor. Két fő része az álló állórész és a forgó forgórész.

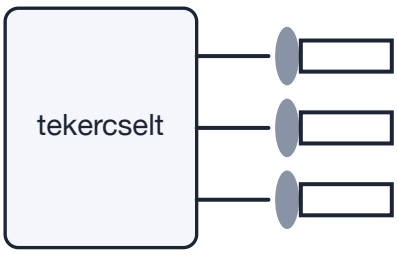


- **Állórész** (sztátor): öntöttvas vagy alumínium ház, lemezelt vastest, hornyaiban 1 vagy 3 fázisú tekercselés.
- **Forgórész** (rotor): kalickás vagy tekercselt (csúszógyűrűs).

A kalickás forgórész rövidre zárt rudakból áll, mint egy mókuskerék. Egyszerű, üzembiztos és olcsó.



kalickás (rövidre zárt)



csúszógyűrűs + indító R

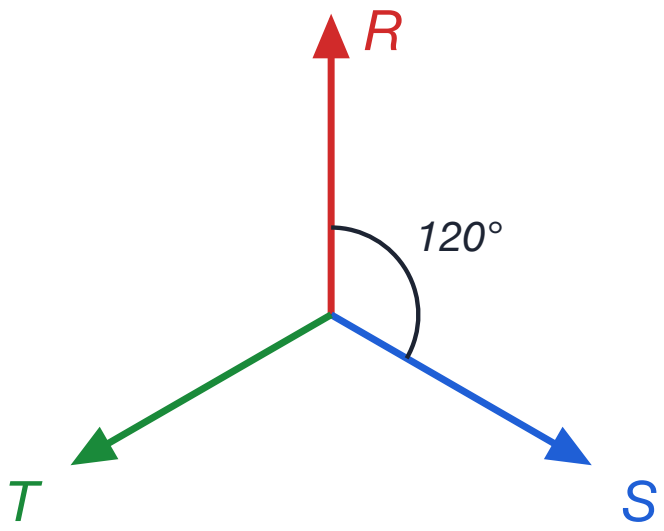
Kalickás	Csúszógyűrűs
egyszerű szerkezet	bonyolult felépítés
üzembiztos működés	drága kivitel
olcsó	nagy indítónyomaték
	kíméletes indítás indító-ellenállással

A csúszógyűrűs forgórész tekercselt, és a tekercsvégek csúszógyűrűkön keresztül kivezethetők. Így indításkor ellenállás köthető a körbe, ami nagy indítónyomatékot és kíméletes indítást ad.

★ A 36. vizsgakérdés éppen ez a táblázat: a két forgórész-típus és tulajdonságaik.

A forgó mágneses mező

Ha az állórész háromfázisú tekercselésére háromfázisú feszültséget kapcsolunk, forgó mágneses mező jön létre. A mező fordulatszáma a szinkron fordulatszám.



SZINKRON FORDULATSZÁM

$$n_0 = \frac{60 \cdot f}{p} \left[\frac{1}{min}\right]$$

Itt p a póluspárok száma. Ötven hertzen egy póluspárnál 3000, két póluspárnál 1500, három póluspárnál 1000 fordulat percenként.

pólusszám	p	n_0 (50 Hz)
2	1	3000 1/min
4	2	1500 1/min
6	3	1000 1/min
8	4	750 1/min

A forgó mező metszi a forgórész vezetőit, és bennük feszültséget indukál. Mivel a forgórész rövidre van zárva, áram folyik benne, és erre a mágneses térben erő hat. Ez a nyomaték forgatja a forgórészt.

1. forgó mező az állórészben

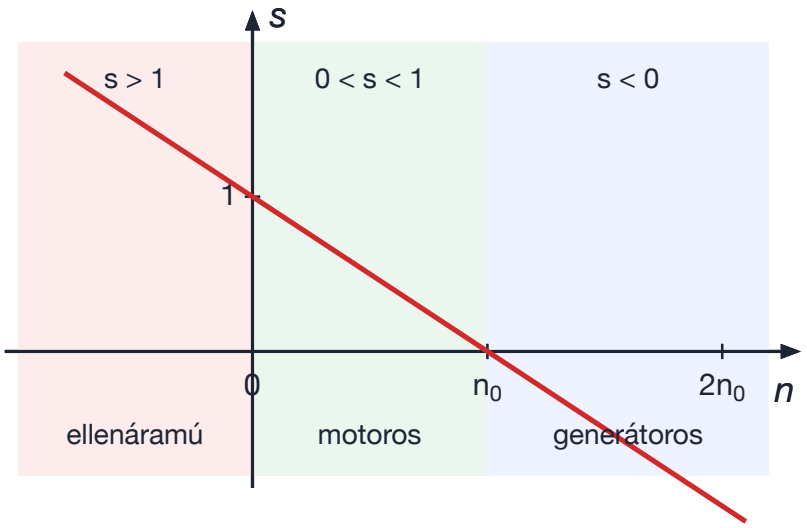
2. feszültség indukálódik a forgórészben
3. áram folyik a rövidre zárt forgórészben
4. erő hat a vezetőkre → nyomaték → forgás

Az indukált feszültségek a transzformátor főegyenletéhez hasonlóan számíthatók, egy tekercselési tényezővel kiegészítve.

$$U_{i1} = 4{,}44\ N_1\ f_1\ \Phi_{max}\ \xi_1,\ U_{i2} = 4{,}44\ N_2\ f_2\ \Phi_{max}\ \xi_2$$

A szlip

A forgórész soha nem érheti el a mező fordulatszámát. Ha elérné, a mező nem metszené a vezetőket, nem indukálódna feszültség, és megszűnne a nyomaték. Innen az aszinkron, vagyis nem szinkron név.



ℹ A forgórész mindig lassabban forog, mint a mező: $n < n_0$ (motoros üzemben).

A lemaradás mértéke a szlip: a mező és a forgórész fordulatszámának különbsége, a szinkron fordulatszámhoz viszonyítva.

SZLIP

$$s = \frac{n_0 - n}{n_0},\ n = n_0\ (1 - s)$$

A névleges szlip általában 3–7 százalék. A forgórészben indukált feszültség frekvenciája a szlip szorozva a hálózati frekvenciával.

$$s_n = 3 \ldots 7\ \%,\ f_2 = s \cdot f_1$$

Példa: egy 4 pólusú motor 1440 fordulattal forog. A szinkron fordulatszám 1500, a szlip 60 per 1500, vagyis 0,04, azaz 4 százalék.

$$s = \frac{1500 - 1440}{1500} = 0{,}04 = 4\ \%$$

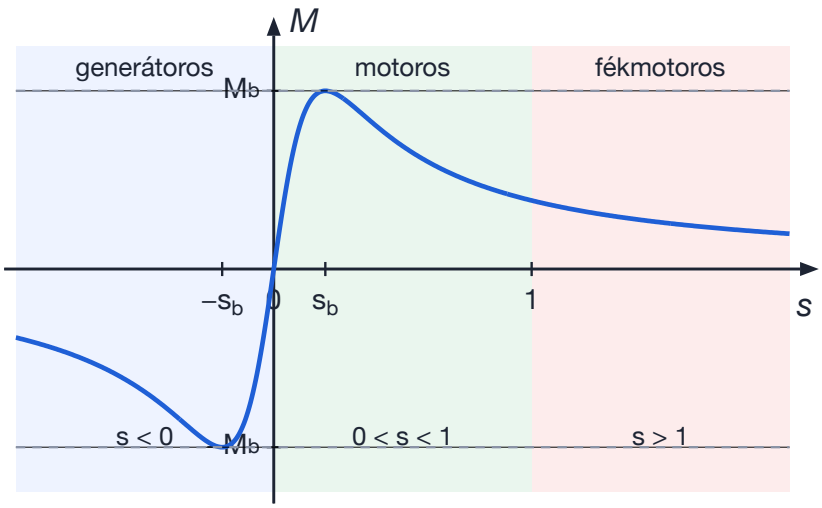
EZT JEGYEZD MEG!

- $n_0 = 60f/p$ (p: póluspárok száma!).
- $s = (n_0 - n)/n_0$.

8.2 Nyomaték: Kloss-képlet és üzemállapotok

A nyomaték–szlip görbe

Az aszinkron gép nyomatéka a szliptől függ. A görbének van egy legnagyobb értéke, a billenőnyomaték, és az ehhez tartozó szlip a billenő szlip.



Billenőnyomaték (M_b) – a gép által kifejthető legnagyobb nyomaték; ennél nagyobb terhelésnél a motor „lebillen”, megáll.

A görbét jó közelítéssel a Kloss-képlet írja le. Csak két adat kell hozzá: a billenőnyomaték és a billenő szlip.

KLOSS-KÉPLET

$$M = M_b \cdot \frac{2}{\frac{s}{s_b} + \frac{s_b}{s}}$$

A billenő szlip a redukált forgórész-ellenállás osztva a szórási reaktanciával.

BILLENŐ SZLIP

$$s_b = \pm \frac{R_2'}{X_s}$$

Ha az állórész ellenállását elhanyagoljuk, a billenőnyomaték: három szorozva a fázisfeszültség

négyzetével, osztva kétszer a reaktancia és a szinkron szögsebesség szorzatával.

$$M_b = \frac{3\,U_{1f}^2}{2\,X_s\,\omega_0},\ \omega_0 = \frac{2\,\pi\,f}{p}$$

Üzemállapotok

A szlip előjele megmutatja az üzemállapotot. Nulla és egy között a gép motorként dolgozik: a forgórész a mezővel egy irányban, de lassabban forog.

Üzemállapot	Szlip	Mi történik?
motoros	$0 < s < 1$	a hálózatból energiát vesz fel, mechanikai munkát ad le
generátoros	$s < 0$	a forgórészt a mezőnél gyorsabban hajtjuk ($n > n_0$), energiát ad vissza
fékmotoros (ellenáramú)	$s > 1$	a forgórész a mezővel szemben forog, fékez

Ha a forgórészt kívülről a szinkron fordulatszámnál gyorsabban hajtjuk, a szlip negatív, és a gép generátorként energiát ad vissza a hálózatnak.

> ℹ Az aszinkron gép önállóan nem képes generátoros üzemre: ehhez hálózat vagy kondenzátortelep kell.

Ha a forgórész a mezővel ellentétesen forog, a szlip egynél nagyobb. Ez a fékmotoros, más néven ellenáramú üzem.

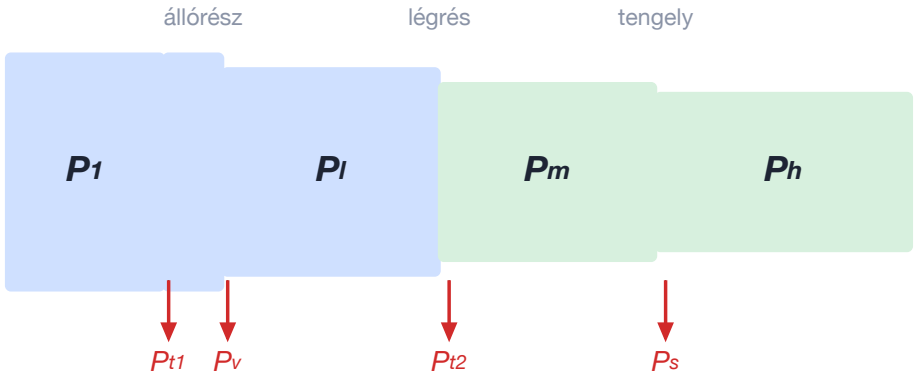
EZT JEGYEZD MEG!

- Motoros: $0 < s < 1$. Generátoros: $s < 0$. Fékmotoros: $s > 1$.
- Kloss: $M = M_b \cdot 2/(s/s_b + s_b/s)$.

8.3 Teljesítményszalag és veszteségek

A teljesítmény útja

A hálózatból felvett teljesítmény nem jut el teljesen a tengelyig. Útközben veszteségek lépnek fel. Ezt a teljesítményszalag szemlélteti.



FELVETT TELJESÍTMÉNY

$$P_1 = \sqrt{3}\, U_v\, I_v \cos\varphi$$

Az állórészben két veszteség van: a tekercsveszteség és a vasveszteség. Ezek levonása után marad a légrés-teljesítmény, amely átjut a forgórészre.

$$P_{t1} = 3\, I_1^2\, R_1,\ P_v = 3\, \frac{U_i^2}{R_0}$$

LÉGRÉS-TELJESÍTMÉNY

$$P_l = P_1 - P_{t1} - P_v = M \cdot \omega_0$$

Forgórész és tengely

A forgórészben a tekercsveszteség a szlip szorozva a légrés-teljesítménnyel. A maradék a mechanikai teljesítmény.

FORGÓRÉSZ

$$P_{t2} = s \cdot P_l,\ P_m = P_1\,(1 - s) = M \cdot \omega$$

Végül a súrlódási veszteséget is levonva kapjuk a tengelyen leadott, hasznos teljesítményt.

HASZNOS TELJESÍTMÉNY, HATÁSFOK

$$P_h = P_m - P_s = M_t \cdot \omega,\ \eta = \frac{P_h}{P_1}$$

Jegyezd meg: a légrés-teljesítmény a szlip arányában oszlik meg. A szlipnyi rész a forgórészben hővé válik, a többi mechanikai teljesítmény lesz.

EZT JEGYEZD MEG!

- $P_1 \rightarrow P_l \rightarrow P_m \rightarrow P_h$
- $P_{t2} = s\, P_l$, $P_m = (1 - s)\, P_l$
- $P_l = M\, \omega_0$, $P_m = M\, \omega$

Indítás és fordulatszám-változtatás

Indításkor a motor nagy áramot vesz fel. Ennek csökkentésére többféle indítási mód van: ellenállásos indítás, csillag–delta indítás és mélyhornyú forgórész.

- **ellenállásos** indítás (csúszógyűrűs gépnél)
- **csillag–delta** (Y–Δ) indítás: indításkor csillagban, utána deltában
- **mélyhornyú** (áramkiszorításos) forgórész

A fordulatszám háromféleképpen változtatható: a frekvencia, a pólusszám vagy a szlip változtatásával. Ma a legelterjedtebb a frekvenciaváltós szabályozás.

- **frekvencia** változtatása (frekvenciaváltó: IGBT, MOSFET …)
- **pólusszám** változtatása (átkapcsolható tekercselés)
- **szlip** változtatása (csúszógyűrűs gépnél)

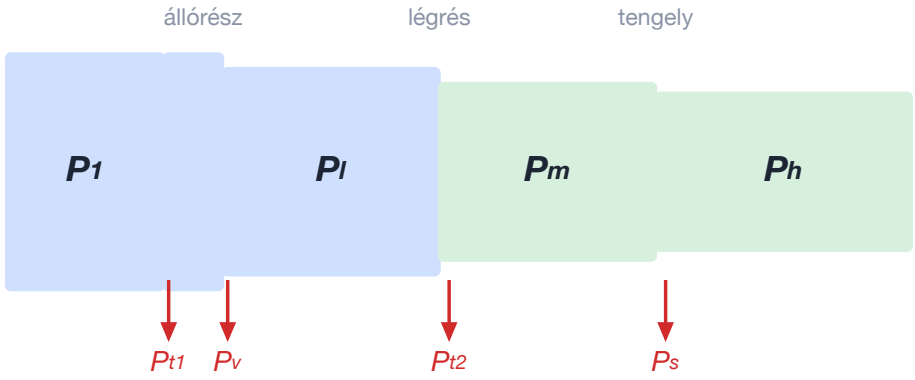
Képletkártya

Szinkron fordulatszám	$n_0 = \frac{60 \cdot f}{p}\ [1/\min]$
Szlip	$s = \frac{n_0 - n}{n_0},\ n = n_0\,(1 - s)$
Forgórész frekvencia	$f_2 = s \cdot f_1$
Indukált feszültségek	$U_{i1} = 4{,}44\ N_1\ f_1\ \Phi_{max}\ \xi_1,\ U_{i2} = 4{,}44\ N_2\ f_2\ \Phi_{max}\ \xi_2$
Kloss-képlet	$M = M_b \cdot \frac{2}{\frac{s}{s_b} + \frac{s_b}{s}}$
Billenő szlip	$s_b = \pm \frac{R_2'}{X_s}$
Billenőnyomaték ($R_1 \approx 0$)	$M_b = \frac{3\ U_{1f}^2}{2\ X_s\ \omega_0},\ \omega_0 = \frac{2\ \pi\ f}{p}$
Légrés-teljesítmény	$P_l = P_1 - P_{t1} - P_v = M \cdot \omega_0$
Mechanikai teljesítmény	$P_m = M\ \omega = P_l\,(1 - s)$
Forgórész tekercsveszteség	$P_{t2} = s \cdot P_l$
Hasznos (tengely-) teljesítmény	$P_h = P_m - P_s = M_t \cdot \omega$
Hatásfok	$\eta = \frac{P_h}{P_1}$

Mintafeladat: szlip és teljesítményszalag (Példatár 7.2)

A feladat

Egy háromfázisú, 6 pólusú, 500 voltos, 50 hertzes indukciós motor 950 fordulat per perc mellett 20 kilowatt teljesítményt ad le a tengelyén.



$2p = 6 \rightarrow p = 3$ $U_1 = 500\ V$ $f = 50\ Hz$ $n = 950\ 1/min$

$P_h = 20\ kW$ $\cos\varphi = 0{,}86$ $P_á = 1500\ W$ $P_s = 1\ kW$

A teljesítménytényező 0,86, az állórész összes vesztesége 1500 watt, a súrlódási veszteség 1 kilowatt. Határozzuk meg a szlipet, a légrés-teljesítményt, a felvett teljesítményt, az áramot és a hatásfokot!

Keresett: s, P_l, P_1, I_1, η.

Megoldás

Hat pólus azt jelenti, hogy három póluspár van. A szinkron fordulatszám 60 szorozva 50, osztva 3-mal, vagyis 1000 fordulat per perc.

$$n_0 = \frac{60 \cdot 50}{3} = 1000\ \frac{1}{min}$$

A szlip 1000 mínusz 950, osztva 1000-rel: 0,05, vagyis 5 százalék.

EREDMÉNY $s = \frac{1000 - 950}{1000} = 0{,}05 = 5\ \%$

A mechanikai teljesítmény a hasznos teljesítmény és a súrlódási veszteség összege: 21 kilowatt. A légrés-teljesítmény ennek az 1 mínusz szlippel vett hányadosa: 22,1 kilowatt.

$$P_m = P_h + P_s = 21\ kW$$

EREDMÉNY $P_l = \frac{P_m}{1 - s} = \frac{21}{0{,}95} = 22{,}1\ kW$

Felvett teljesítmény, hatásfok, áram

A felvett teljesítmény a légrés-teljesítmény és az állórész-veszteség összege: 23,6 kilowatt. A hatásfok 20 osztva 23,6-tal, vagyis 0,847.

EREDMÉNY $P_1 = P_l + P_á = 22{,}1 + 1{,}5 = 23{,}6\ kW,\ \eta = \frac{20}{23{,}6} = 0{,}847 = 84{,}7\ \%$

ℹ A példatár a hatásfokot 0,84-re (84 %-ra) kerekíti; pontosan 0,847.

A felvett áram a háromfázisú teljesítmény képletéből: 23 600 watt osztva gyök három szorozva 500 szorozva 0,86-tal, ami 31,7 amper.

EREDMÉNY $I_1 = \frac{P_1}{\sqrt{3}\, U_1 \cos\varphi} = \frac{23600}{\sqrt{3} \cdot 500 \cdot 0{,}86} = 31{,}7\ \text{A}$

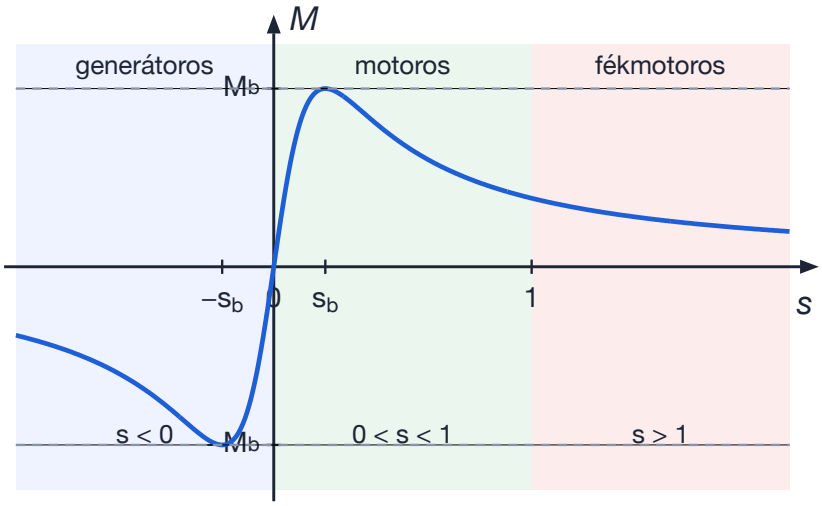
EZT JEGYEZD MEG!

- 6 pólus → p = 3 → n_0 = 1000 1/min.
- $P_l = P_m / (1 - s)$, $P_1 = P_l + P_á$.

Mintafeladat: Kloss-képlet (Órai feladat (Példatár 7.7, 400 V-tal))

A feladat

Az órai feladat: egy 400 voltos, csillagkapcsolású, 50 hertzes, 4 pólusú aszinkron motor redukált forgórész-ellenállása 0,07 ohm, az együttes szórási reaktancia 0,35 ohm.



$U_v = 400\ \text{V (Y)}$ $f = 50\ \text{Hz}$ $2p = 4 \rightarrow p = 2$ $R_2' = 0{,}07\ \Omega$

$X_s = 0{,}35\ \Omega$ $n_n = 1440\ 1/\text{min}$

Névleges terhelésnél a fordulatszám 1440 fordulat percenként. Mekkora a névleges nyomaték? Mekkora lesz a fordulatszám, ha a terhelőnyomaték a kétszeresére nő? Az állórész ellenállását elhanyagoljuk.

Keresett: M_n; n, ha $M = 2M_n$.

1. Billenőnyomaték és billenő szlip

A szinkron fordulatszám 1500 fordulat per perc. A szinkron szögsebesség 2 pí szorozva 50, osztva 2-vel: 157,08 radián per szekundum.

$$n_0 = \frac{60 \cdot 50}{2} = 1500 \ \frac{1}{\text{min}}, \ \omega_0 = \frac{2\pi \cdot 50}{2} = 157{,}08 \ \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

A billenő szlip 0,07 osztva 0,35-tel, vagyis 0,2.

EREDMÉNY $s_b = \frac{R_2'}{X_s} = \frac{0{,}07}{0{,}35} = 0{,}2$

A fázisfeszültség 400 osztva gyök hárommal, 230,9 volt. A billenőnyomaték 3 szorozva 230,9 négyzetével, osztva 2 szorozva 0,35 szorozva 157,08-cal: 1455 newtonméter.

EREDMÉNY $M_b = \frac{3 \, U_{1f}^2}{2 \, X_s \, \omega_0} = \frac{3 \cdot 230{,}9^2}{2 \cdot 0{,}35 \cdot 157{,}08} = 1455 \ \text{Nm}$

2. Névleges nyomaték

A névleges szlip 1500 mínusz 1440, osztva 1500-zal: 0,04.

$$s_n = \frac{1500 - 1440}{1500} = 0{,}04$$

A Kloss-képletbe helyettesítve: 2 szorozva 1455, osztva 0,04 per 0,2 plusz 0,2 per 0,04-del, vagyis 0,2 plusz 5-tel.

$$M_n = \frac{2 \, M_b}{\frac{s_n}{s_b} + \frac{s_b}{s_n}} = \frac{2 \cdot 1455}{0{,}2 + 5}$$

A névleges nyomaték 559,7 newtonméter.

EREDMÉNY $M_n = 559{,}7 \ \text{Nm}$

3. Kétszeres terhelés

Most a terhelőnyomaték a kétszeresére nő: 1119,3 newtonméter. Keressük azt a szlipet, amelynél a motor ennyi nyomatékot ad.

$$M = 2 \, M_n = 1119{,}3 \ \text{Nm}$$

A Kloss-képletet átrendezve: s per 0,2 plusz 0,2 per s egyenlő 2 szorozva 1455, osztva 1119,3-mal, ami 2,6.

$$\frac{s}{0{,}2} + \frac{0{,}2}{s} = \frac{2 \, M_b}{M} = 2{,}6$$

Szorozzunk be 0,2 szorozva s-sel! A másodfokú egyenlet: s négyzet mínusz 0,52 s plusz 0,04 egyenlő nulla. Az órai jegyzetben ugyanez ötszörösen szerepel.

$$s^2 - 0{,}52 \, s + 0{,}04 = 0 \ (5 \, s^2 - 2{,}6 \, s + 0{,}2 = 0)$$

A két gyök 0,0939 és 0,426. A második nagyobb a billenő szlipnél, ez a görbe instabil szakasza, ezért elvetjük.

$$s_1 = 0{,}0939,\ s_2 = 0{,}426 > s_b \rightarrow \text{elvetjük}$$

⚠ Mindig a billenő szlipnél kisebb gyököt válaszd – az a stabil munkapont.

Az új fordulatszám 1500 szorozva 1 mínusz 0,0939: 1359 fordulat per perc.

EREDMÉNY $n = n_0\,(1 - s) = 1500 \cdot (1 - 0{,}0939) = 1359\ \frac{1}{\text{min}}$

Az órán a légrés-teljesítményt is kiszámoltuk, de a névleges nyomatékkal. Kétszeres terhelésnél a légrés-teljesítmény 1119,3 szorozva 157,08: 175,8 kilowatt.

$$\text{névleges: } P_l = M_n\,\omega_0 = 87{,}9\ \text{kW},\ \text{kétszeres: } P_l = 2\,M_n\,\omega_0 = 175{,}8\ \text{kW}$$

EZT JEGYEZD MEG!

- $s_b = R_2'/X_s$, $M_b = 3U_f^2/(2X_s\omega_0)$
- Másodfokú egyenlet: a kisebb (stabil) gyök kell.

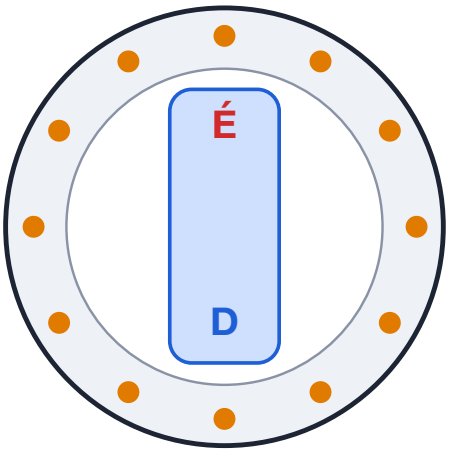
9. Szinkron gép

9.1 Felépítés és működési elv

Mi a szinkron gép?

A szinkron gép olyan váltakozó áramú gép, amelynek fordulatszámát kizárólag a frekvencia és a póluspárok száma határozza meg. A forgórész pontosan együtt forog a mágneses mezővel.

állórész: 3F tekercselés



forgórész: DC gerjesztés

FORDULATSZÁM

$$n = \frac{60 \cdot f}{p}$$

Ötven hertzen egy póluspárral 3000, kettővel 1500, hárommal 1000, néggyel 750 fordulat percenként. Nincs szlip.

p	1	2	3	4
n (50 Hz)	3000	1500	1000	750

ℹ A szinkron gép fordulatszáma a terheléstől **független**.

A gép részei

Az állórész lemezelt vastest, amelyet hegesztett acéllemez váz fog össze. A hornyokban van a háromfázisú tekercselés, a házat két oldalról öntöttvas pajzs zárja le.

- **Állórész**: lemezelt vastest, acéllemez váz, nyitott vagy félig zárt hornyokban a 3F tekercselés, öntöttvas pajzsok.

A forgórészen egyenárammal gerjesztett tekercs van, ez hozza létre a mágneses teret. A gerjesztőáramot csúszógyűrűkön és szén- vagy bronzkeféken keresztül vezetik be.

- **Forgórész**: egyenáramú gerjesztőtekercs (pólusok), csúszógyűrűk, szén- vagy bronzkefék.

A gerjesztést általában egy közös tengelyre szerelt egyenáramú gerjesztőgép adja. A gőzturbinás generátorok forgórésze hengeres kialakítású.

> ℹ A szinkron gép külső gerjesztésű: a gerjesztését egy másik géptől (gerjesztőgép) kapja.

Motor és generátor

Generátorként a forgórészt turbina vagy dízelmotor forgatja. A gerjesztett pólusok forgó mágneses tere metszi az állórész 120 fokkal eltolt tekercseit, és bennük háromfázisú feszültség indukálódik.

> **Szinkron generátor** – a forgórész egyenárammal gerjesztett pólusai forognak; az állórész 120°-kal eltolt tekercseiben háromfázisú feszültség indukálódik.

Motorként az állórészre háromfázisú feszültséget kapcsolunk, ez forgó mezőt hoz létre. A gerjesztett forgórészt a forgó mező szinkron fordulatszámon magával viszi.

> **Szinkron motor** – az állórészre 3F feszültséget kapcsolunk, a forgórészt egyenárammal gerjesztjük; a forgó mező a pólusokat szinkron fordulatszámon viszi.

A szinkron motornak nincs indítónyomatéka: az álló forgórészt a forgó mező nem tudja elindítani. Ezért aszinkron felfutással indítják: a pólussarukba épített csillapítórudak kalickát alkotnak, és a motor aszinkron motorként felgyorsul.

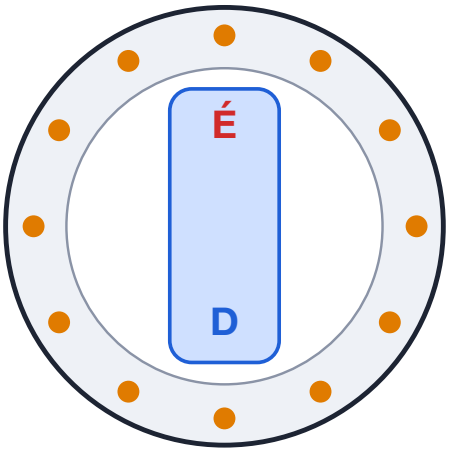
> ⚠ Indítás: aszinkron felfutás a csillapítókalickával, majd a gerjesztés bekapcsolása után a motor „beugrik” a szinkron fordulatszámra.

9.2 Hálózatra kapcsolás és terhelési szög

Szinkronizálás

A szinkron generátort csak akkor szabad a hálózatra kapcsolni, ha az általa termelt feszültség pontosan megegyezik a hálózatéval. Ezt nevezzük szinkronizálásnak.

állórész: 3F tekercselés



forgórész: DC gerjesztés

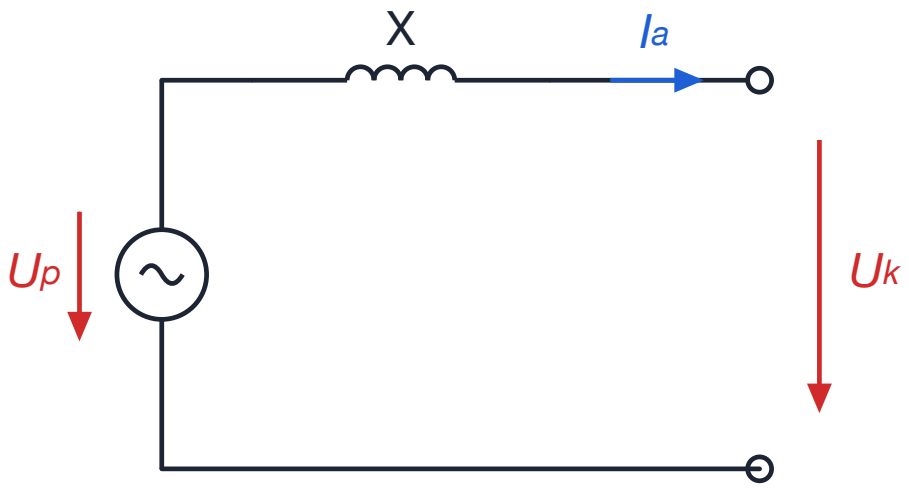
> **Szinkronizálás** – a generátor feszültségének összehangolása a hálózattal a hálózatra kapcsolás előtt.

Négy feltételnek kell teljesülnie: azonos frekvencia, azonos fázis, azonos fázissorrend és azonos amplitúdó.

Feltétel	Mivel állítjuk?
frekvencia	fordulatszám változtatásával
amplitúdó (feszültség)	a gerjesztőárammal
fázis	a fordulatszám nagyon finom állításával
fázissorrend	a bekötés ellenőrzésével

Áramköri modell

A szinkron gép egy fázisát egyszerűen modellezhetjük: egy feszültségforrás, a pólusfeszültség, és vele sorban a szinkron reaktancia. Az armatúra-ellenállást általában elhanyagoljuk.



- U_p: pólusfeszültség (a gerjesztett forgórész által üresjárásban indukált feszültség)
- U_k: kapocsfeszültség
- X: szinkron reaktancia
- I_a: armatúraáram

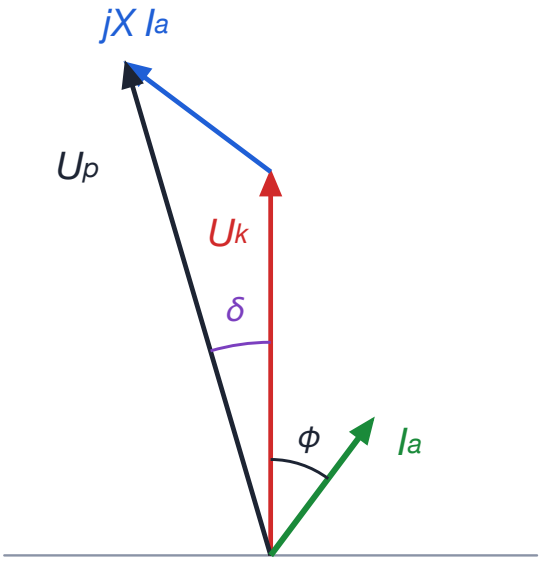
Generátornál a pólusfeszültség a kapocsfeszültség és a reaktancián eső feszültség összege. A reaktancia feszültsége 90 fokkal siet az áramhoz képest.

GENERÁTOR

$$\overline{U}_p = \overline{U}_k + j\,X\,\overline{I}_a$$

A terhelési szög

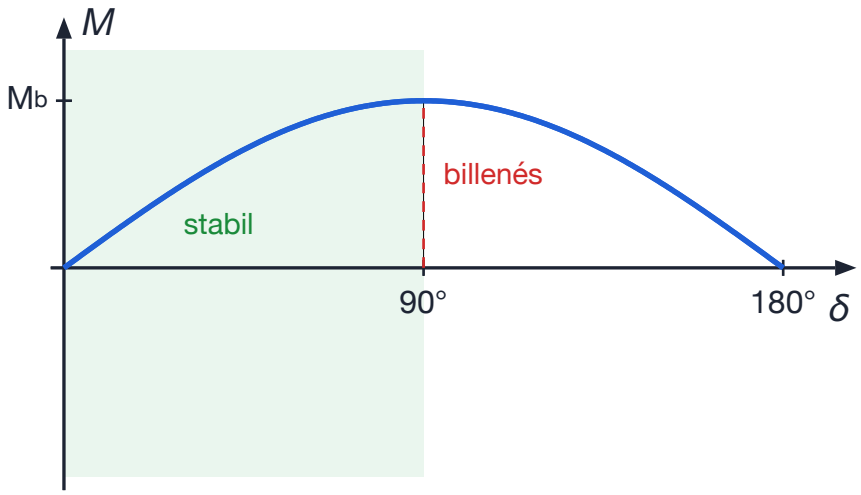
A pólusfeszültség és a kapocsfeszültség közötti szöget terhelési szögnek nevezzük, jele delta. Minél nagyobb a terhelés, annál nagyobb ez a szög.



Terhelési szög (δ) – a pólusfeszültség (U_p) és a kapocsfeszültség (U_k) közötti

szög.

A nyomaték a terhelési szög szinuszával arányos. A legnagyobb, a billenőnyomaték, 90 foknál van. Efölött a gép kiesik a szinkronizmusból.



NYOMATÉK

$$M = \frac{3\,U_k\,U_p}{X\,\omega_0}\,\sin\delta$$

Stabil üzem csak 0 és 90 fok között lehetséges.

EZT JEGYEZD MEG!

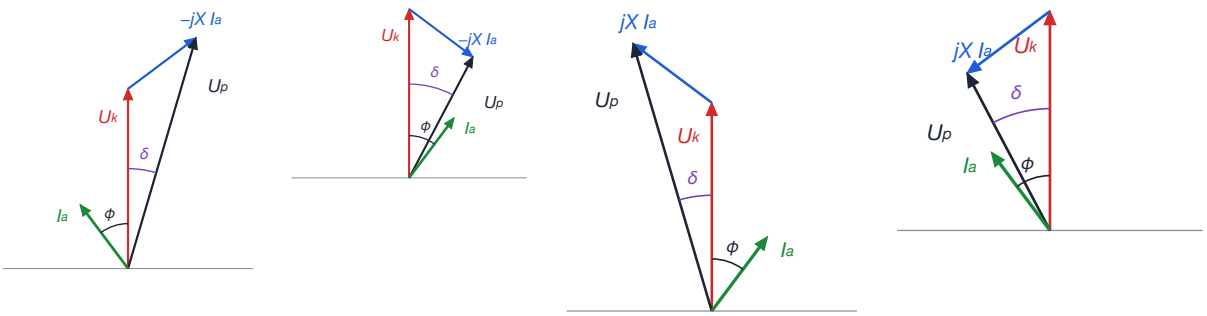
- Szinkronizálás: frekvencia, fázis, fázissorrend, amplitúdó.
- δ: U_p és U_k közötti szög; billenés δ = 90°-nál.

9.3 A négy üzemállapot vektorábrája

Üzemállapotok

A szinkron gép a gerjesztéstől függően meddő teljesítményt vehet fel vagy adhat le. Ezt nevezzük induktív, illetve kapacitív jellegnek. Az órán elhangzott, hogy a zárthelyin ez a négy vektorábra kell.

Motoros, kapacitív **Motoros, induktív** **Generátoros, induktív** **Generátoros, kapacitív**

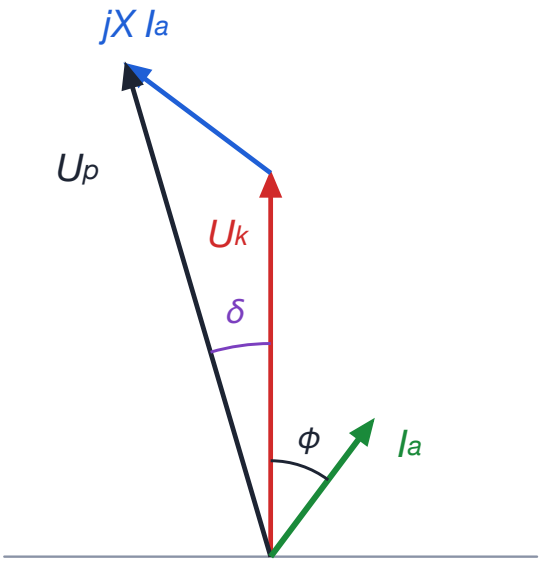


Motoros üzemben, kapacitív jelleggel a gép túlgerjesztett, és meddő energiát termel. Induktív jelleggel alulgerjesztett, és meddő energiát vesz fel.

Üzem	Jelleg	Meddő energia
motoros	kapacitív (túlgerjesztett)	meddőt **termel**
motoros	induktív (alulgerjesztett)	meddőt **vesz fel**
generátoros	induktív terhelésnél (túlgerjesztett)	meddőt **termel**
generátoros	kapacitív terhelésnél (alulgerjesztett)	meddőt **vesz fel**

Hogyan rajzold meg?

A rajzolás menete mindig ugyanaz. Először a kapocsfeszültséget rajzoljuk függőlegesen felfelé. Ehhez képest rajzoljuk fí szöggel az áramot: induktív esetben késik, vagyis jobbra dől, kapacitív esetben siet, vagyis balra dől.

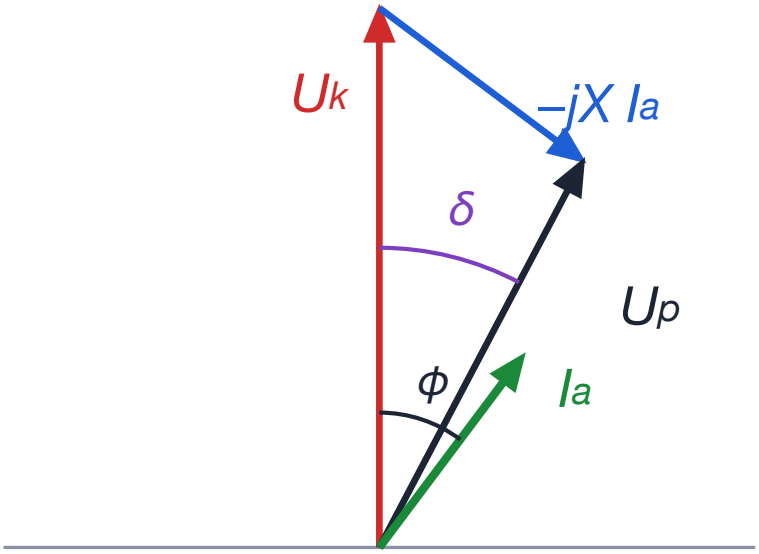


1. U_k függőlegesen felfelé
2. I_a ϕ szöggel: induktív → késik (jobbra), kapacitív → siet (balra)

Utána a kapocsfeszültség végéhez hozzámérjük a reaktancia feszültségét, amely 90 fokkal siet az áramhoz képest. Generátornál hozzáadjuk, motornál levonjuk.

3. U_k végéhez: generátornál $+jX \cdot I_a$, motornál $-jX \cdot I_a$ (90° az áramhoz képest)
4. U_p: az origóból a vektor végéig

Végül az origóból a vektor végéig húzott nyíl a pólusfeszültség, a kettő közötti szög pedig a terhelési szög.



MOTOR

motor: $\overline{U}_k = \overline{U}_p + j\,X\,\overline{I}_a \rightarrow \overline{U}_p = \overline{U}_k - j\,X\,\overline{I}_a$

EZT JEGYEZD MEG!

- Kiindulás: U_k függőlegesen.
- $jX \cdot I_a$ merőleges az áramra.
- Túlgerjesztett gép meddőt termel.

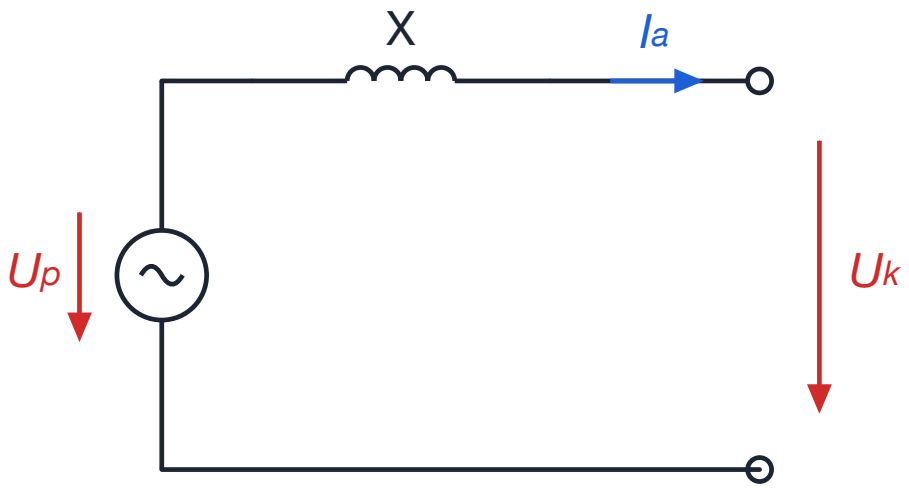
Képletkártya

Fordulatszám	$n = \frac{60 \cdot f}{p}$
Feszültségegyenlet (generátor)	$\overline{U}_p = \overline{U}_k + j\,X\,\overline{I}_a$
Feszültségegyenlet (motor)	$\overline{U}_k = \overline{U}_p + j\,X\,\overline{I}_a$
Szinkron reaktancia feszültsége	$U_X = I_a \cdot X$
Pólusfeszültség (generátor, induktív)	$U_p = \sqrt{(U_k + U_X \sin\varphi)^2 + (U_X \cos\varphi)^2}$
Terhelési szög	$\operatorname{tg}\delta = \frac{U_X \cos\varphi}{U_k + U_X \sin\varphi}$
Nyomaték	$M = \frac{3\,U_k\,U_p}{X\,\omega_0}\sin\delta = \frac{P}{\omega_0}$
Billenőnyomaték	$M_b = \frac{3\,U_k\,U_p}{X\,\omega_0}\ (\delta = 90°)$

Mintafeladat: szinkron generátor (Órai feladat (Példatár 8.5))

A feladat

Az órai feladat: egy 50 kilovoltamperes, 500 voltos, 50 hertzes, négypólusú, háromfázisú, csillagkapcsolású, túlgerjesztett szinkron generátor névleges terheléssel üzemel.



$S = 50\ \text{kVA}$ $U_v = 500\ \text{V (Y)}$ $f = 50\ \text{Hz}$ $2p = 4$ $\cos\varphi = 0{,}8\ \text{(ind.)}$

$X = 2{,}6\ \Omega$ $P_{t+v} = 3\ \text{kW}$ $P_s = 400\ \text{W}$

A teljesítménytényező 0,8, a tekercs- és vasveszteség együtt 3 kilowatt, a súrlódási veszteség 400

watt, a szinkron reaktancia 2,6 ohm. Számoljuk ki az áramot, a pólusfeszültséget, a terhelési szöget és a nyomatékot!

Keresett: I_a, Q, U_p, δ, M, P_{fel}.

1. Áram és teljesítmények

Az armatúraáram a látszólagos teljesítményből: 50 000 osztva gyök három szorozva 500-zal, vagyis 57,74 amper.

EREDMÉNY $$I_a = \frac{S}{\sqrt{3}\,U_v} = \frac{50000}{\sqrt{3}\cdot 500} = 57{,}74\ \text{A}$$

A leadott hatásos teljesítmény 40 kilowatt, a meddő 30 kilovár.

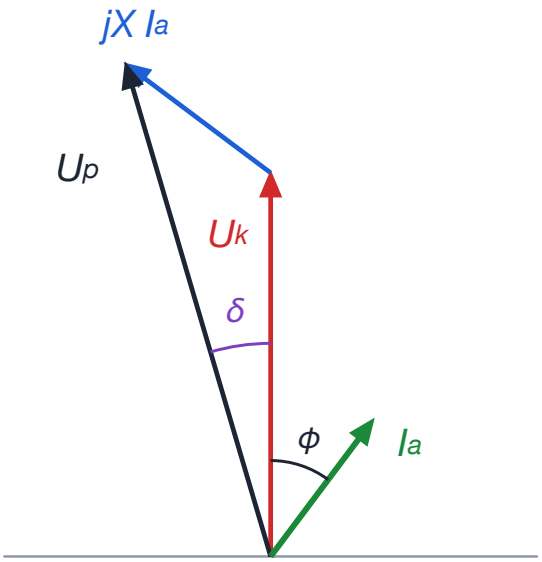
$$P = S\cos\varphi = 40\ \text{kW},\ Q = S\sin\varphi = 30\ \text{kVAr}$$

A fázisfeszültség 500 osztva gyök hárommal, 288,68 volt. A reaktancián eső feszültség 57,74 szorozva 2,6-tal: 150,1 volt.

$$U_{kf} = \frac{500}{\sqrt{3}} = 288{,}68\ \text{V},\ U_X = I_a\,X = 57{,}74\cdot 2{,}6 = 150{,}1\ \text{V}$$

2. Pólusfeszültség és terhelési szög

A vektorábrából: a pólusfeszültség vízszintes összetevője a reaktancia-feszültség szorozva koszinusz fível, a függőleges összetevője a kapocsfeszültség plusz a reaktancia-feszültség szorozva szinusz fível.



$$U_{pf} = \sqrt{(U_X\cos\varphi)^2 + (U_{kf} + U_X\sin\varphi)^2}$$

Számokkal: 150,1 szorozva 0,8 egyenlő 120,1, és 288,68 plusz 150,1 szorozva 0,6, egyenlő 378,7. A pólus-fázisfeszültség 397,3 volt, vonali értékben 688,2 volt.

EREDMÉNY $U_{pf} = \sqrt{120{,}1^2 + 378{,}7^2} = 397{,}3\ \text{V}$

EREDMÉNY $U_p = \sqrt{3} \cdot 397{,}3 = 688{,}2\ \text{V (vonali)}$

A terhelési szög tangense 120,1 osztva 378,7-tel, ami 0,317. A terhelési szög 17,59 fok.

EREDMÉNY $\operatorname{tg} \delta = \frac{120{,}1}{378{,}7} = 0{,}317 \rightarrow \delta = 17{,}59°$

A példatárban itt 17,52 fok szerepel, ez egy kis számolási pontatlanság: a 0,317 tangenshez 17,59 fok tartozik. Emiatt kap ott az ellenőrzés 253,3 newtonmétert. A pontos szöggel a két nyomaték pontosan egyezik, ahogy mindjárt látjuk.

✎ A példatárban „δ = 17,52°” és ellenőrzésként „M = 253,3 Nm” áll. A tg δ = 0,317-hez **17,59°** tartozik; ezzel az ellenőrző nyomaték is pontosan 254,6 Nm (a jegyzetben kerekítve 17,5°).

3. Nyomaték és felvett teljesítmény

A szinkron szögsebesség négypólusú gépnél 157,08 radián per szekundum. A leadott teljesítményhez tartozó nyomaték 40 000 osztva 157,08-cal: 254,6 newtonméter.

EREDMÉNY $M = \frac{P}{\omega_0} = \frac{40000}{157{,}08} = 254{,}6\ \text{Nm}$

Ellenőrzésként a terhelési szöggel is: 3 szorozva 288,68 és 397,3, osztva 2,6 szorozva 157,08-cal, szorozva szinusz 17,59 fokkal: szintén 254,6 newtonméter.

$$M = \frac{3\, U_{kf}\, U_{pf}}{X\, \omega_0} \sin \delta = \frac{3 \cdot 288{,}68 \cdot 397{,}3}{2{,}6 \cdot 157{,}08} \cdot \sin 17{,}59° = 254{,}6\ \text{Nm}$$

A turbinától felvett teljesítmény a leadott teljesítmény és a veszteségek összege: 40 plusz 3 plusz 0,4, vagyis 43,4 kilowatt.

EREDMÉNY $P_{fel} = P + P_{t+v} + P_s = 40 + 3 + 0{,}4 = 43{,}4\ \text{kW}$

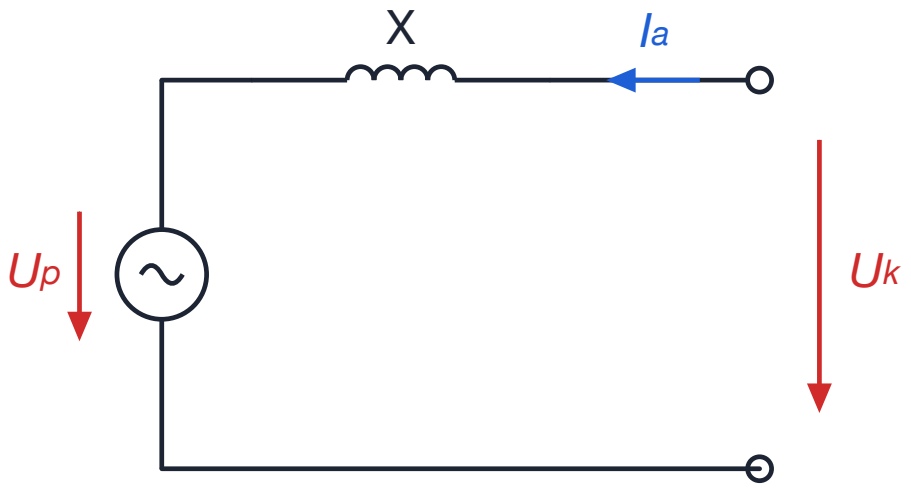
EZT JEGYEZD MEG!

- Fázisértékekkel számolj!
- U_p: Pitagorasz a vektorábrából.
- $M = P/\omega_0 = (3U_kU_p/X\omega_0) \sin \delta$.

Mintafeladat: szinkron motor induktív és kapacitív jelleggel (Példatár 8.4)

A feladat

Egy háromfázisú, csillagkapcsolású, 11 000 voltos szinkron motor 60 amper áramot vesz fel. Az ellenállása elhanyagolható, a fázisonkénti szinkron reaktancia 30 ohm, a teljesítménytényező 0,8.



$U_v = 11000\ V\ (Y)$ $I = 60\ A$ $X = 30\ \Omega$ $\cos\varphi = 0{,}8$

Számoljuk ki a felvett teljesítményt és a pólusfeszültséget, ha a gép először induktív, majd kapacitív fogyasztó jellegű!

Keresett: P, U_p (a) induktív, b) kapacitív).

Közös adatok

A fázisfeszültség 11 000 osztva gyök hárommal: 6350,9 volt. A felvett teljesítmény gyök három szorozva 11 000-rel, 60-nal és 0,8-del: 914,5 kilowatt.

$$U_{kf} = \frac{11000}{\sqrt{3}} = 6350{,}9\ V$$

EREDMÉNY $P = \sqrt{3} \cdot 11000 \cdot 60 \cdot 0{,}8 = 914{,}5\ kW$

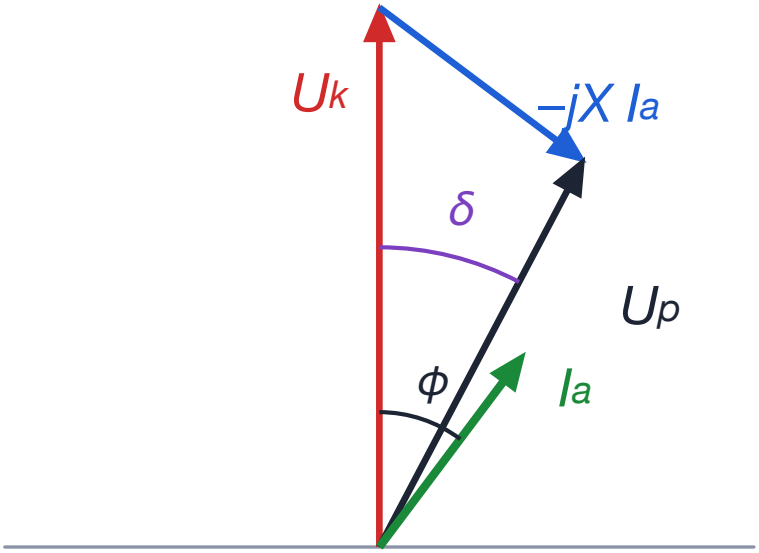
A kapocsfeszültség áram irányú összetevője 6350,9 szorozva 0,8: 5080,7 volt, a rá merőleges összetevő 6350,9 szorozva 0,6: 3810,5 volt. A reaktancia feszültsége 30 szorozva 60, vagyis 1800 volt.

$$U_{kR} = U_k \cos\varphi = 5080{,}7\ V,\ U_{kX} = U_k \sin\varphi = 3810{,}5\ V,\ U_X = 1800\ V$$

a) Induktív jelleg

Induktív jelleg esetén a reaktancia feszültsége csökkenti a merőleges összetevőt: 3810,5 mínusz

1800.



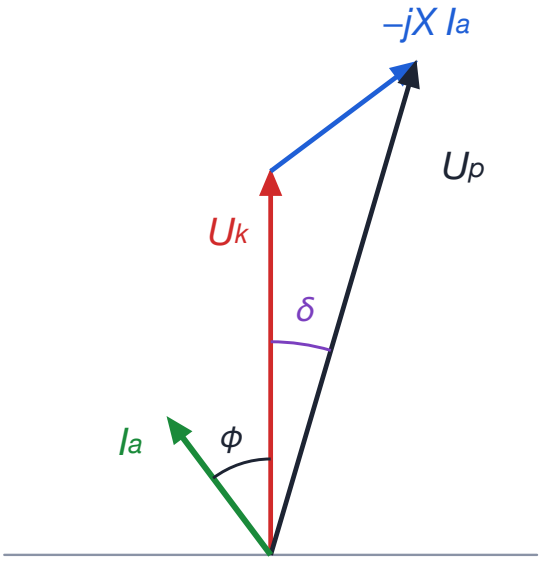
$$U_{pf} = \sqrt{(U_{kX} - U_X)^2 + U_{kR}{}^2} = \sqrt{2010{,}5^2 + 5080{,}7^2}$$

A pólus-fázisfeszültség 5464 volt, vonali értékben 9464 volt. Ez kisebb a kapocsfeszültségnél: a motor alulgerjesztett, meddőt vesz fel.

EREDMÉNY $U_{pf} = 5464\ \text{V}, U_p = \sqrt{3} \cdot 5464 = 9464\ \text{V}$

b) Kapacitív jelleg

Kapacitív jelleg esetén a reaktancia feszültsége növeli a merőleges összetevőt: 3810,5 plusz 1800.



$$U_{pf} = \sqrt{(U_{kX} + U_X)^2 + U_{kR}{}^2} = \sqrt{5610{,}5^2 + 5080{,}7^2}$$

A pólus-fázisfeszültség 7569 volt, vonali értékben 13 110 volt. Ez nagyobb a kapocsfeszültségnél: a motor túlgerjesztett, meddőt termel.

EREDMÉNY $U_{pf} = 7569\ \text{V}, U_p = \sqrt{3} \cdot 7569 = 13110\ \text{V}$

EZT JEGYEZD MEG!

- Induktív (alulgerjesztett): $U_p < U_k$.
- Kapacitív (túlgerjesztett): $U_p > U_k$.

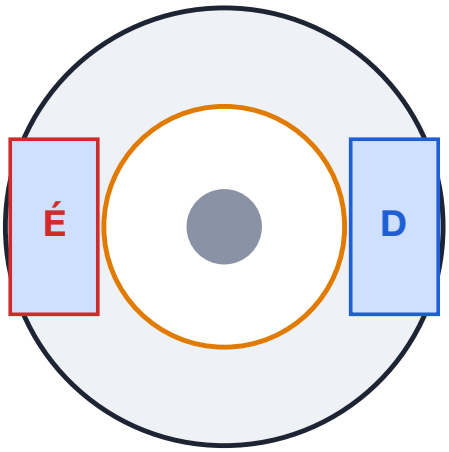
10. Egyenáramú gép

10.1 Felépítés és működési elv

Az egyenáramú gép részei

Az egyenáramú gép állórésze tömör vastest, rajta a főpólusok. A pólusokon lévő gerjesztőtekercset egyenárammal tápláljuk, ez hozza létre a mágneses teret.

állórész: főpólusok, gerjesztőtekercs



forgórész (armatúra) + kommutátor

- **Állórész**: tömör vastest, a pólusokon egyenárammal gerjesztett tekercs (főpólus, segédpólus).

A forgórész, más néven armatúra, vékony, egymástól szigetelt lemezekből áll, hogy kicsi legyen az örvényáram-veszteség. A hornyaiban van az armatúratekercs.

- **Forgórész (armatúra)**: lemezelt vastest (0,35–0,5 mm lemezek), hornyaiban az armatúratekercs.

A kommutátor egymástól elszigetelt rézszegmensekből álló henger. A rajta csúszó kefék vezetik az áramot a forgó tekercsbe.

- **Kommutátor**: szigetelt rézszegmensekből álló henger.
- **Kefék**: a kommutátoron csúsznak, rajtuk kb. 1–2 V feszültség esik.

A kommutátor szerepe

Egy mágneses térben forgatott tekercsben váltakozó feszültség indukálódik. Hogy a kapcsokon mégis egyenfeszültség legyen, a kommutátor minden félfordulatnál megcseréli a tekercs kivezetéseit.

> **Kommutátor** – mechanikus egyenirányító: amikor a tekercsben az indukált feszültség iránya megfordul, a kefékhez csatlakozó szegmensek is megcserélődnek.

Motorként ugyanez fordítva működik: a kommutátor mindig úgy fordítja az áramot a tekercsben, hogy a nyomaték iránya állandó maradjon.

> ℹ Az első forgó mozgású egyenáramú motort, a „villámdelejes forgonyt” Jedlik Ányos készítette.

Indukált feszültség és nyomaték

A forgó armatúrában indukált feszültség arányos a fluxussal és a szögsebességgel. A k gépállandó a gép felépítésétől függ.

INDUKÁLT FESZÜLTSÉG

$$U_i = k \cdot \Phi \cdot \omega$$

A nyomatékot a teljesítmény-egyensúlyból kapjuk: a mechanikai teljesítmény, M szorozva omega, egyenlő a belső villamos teljesítménnyel, Ui szorozva Ia.

$$M\,\omega = U_i\,I_a = k\,\Phi\,\omega\,I_a$$

NYOMATÉK

$$M = k \cdot \Phi \cdot I_a$$

A gépállandó 2 N p per pí, ahol N a vezetőkeretek, p a póluspárok száma. Fordulatszámmal felírva az indukált feszültség C szorozva fí szorozva n.

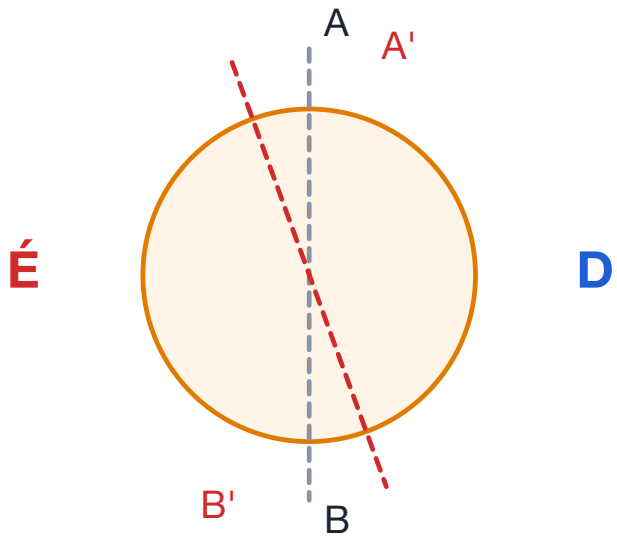
$$k = \frac{2\,N\,p}{\pi},\; U_i = C \cdot \Phi \cdot n$$

EZT JEGYEZD MEG!

- $U_i = k\Phi\omega$ – a fordulatszámmal arányos.
- $M = k\Phi I_a$ – az armatúraárammal arányos.

Armatúra-visszahatás

Ha az armatúrában nem folyik áram, a semleges zóna merőleges a főpólusok fluxusára. A kefék ebben a zónában vannak.



Áram nélkül a semleges zóna (A–B) merőleges a főpólus fluxusára.

Ha az armatúrában is folyik áram, az is mágneses teret hoz létre. Az eredő tér elfordul, ezzel a semleges zóna is elmozdul. Ez az armatúra-visszahatás.

> **Armatúra-visszahatás** – az armatúraáram mágneses tere eltorzítja a főpólus terét, ezért a semleges zóna elfordul (A′–B′).

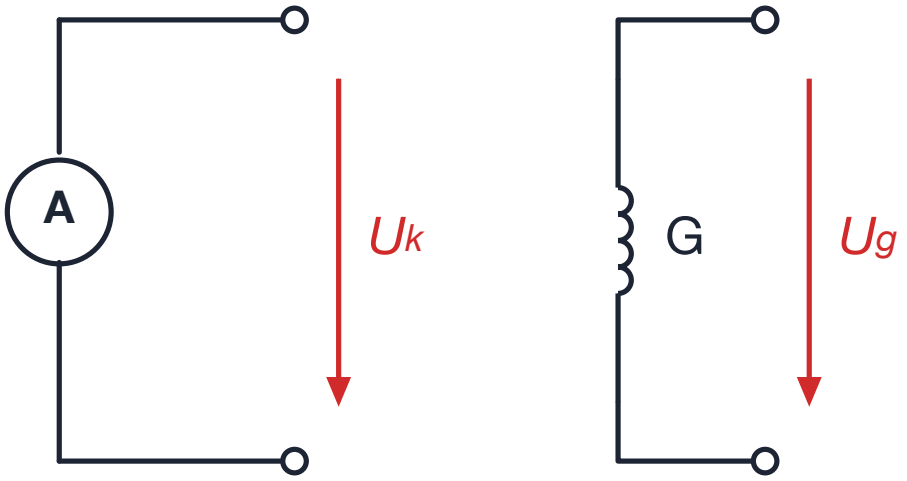
Ha a kefék az eredeti helyen maradnak, kefeszikrázás lép fel. Ezt kompenzáló tekercseléssel és az armatúrával sorba kötött segédpólus-tekercsekkel lehet kiküszöbölni.

> ⚠ Következmény: kefeszikrázás. Ellenszer: kompenzáló tekercselés a pólussarukban, segédpólusok.

10.2 Gerjesztési módok és üzemeltetés

Külső és párhuzamos gerjesztés

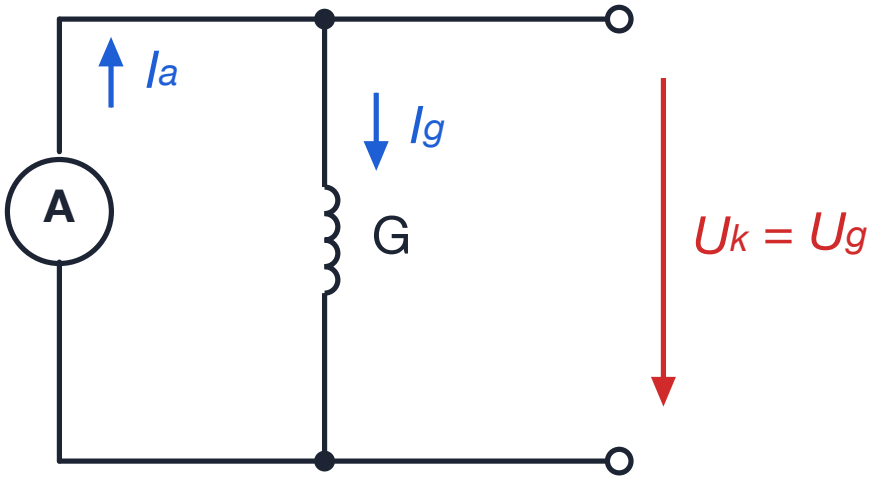
A gerjesztőtekercs többféleképpen kapcsolható. Külső gerjesztésnél a gerjesztőfeszültség egy független forrásból jön. Az ilyen gép a legdinamikusabb, és a legjobban szabályozható.



független forrás

> **Külső gerjesztés** – a gerjesztőtekercset független áramforrás táplálja; legdinamikusabb, legjobban szabályozható.

Párhuzamos, más néven sönt gerjesztésnél a gerjesztőtekercs az armatúrával párhuzamosan van kötve, így a gerjesztőfeszültség egyenlő a kapocsfeszültséggel.



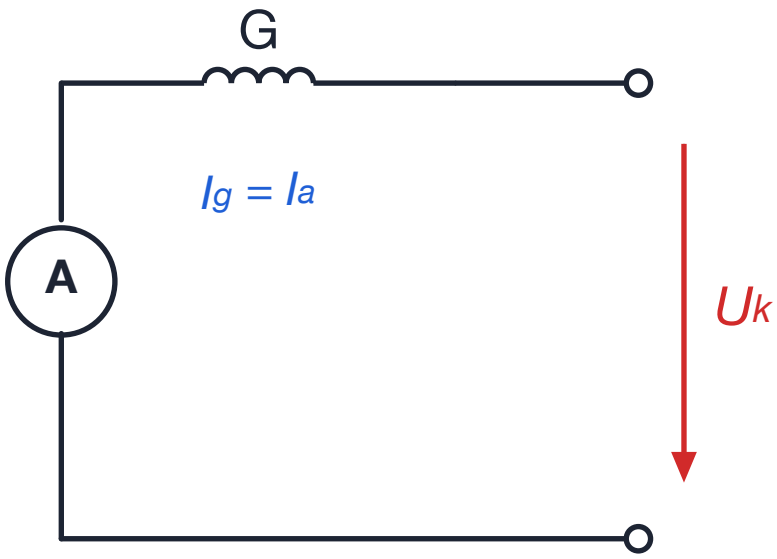
> **Párhuzamos (sönt) gerjesztés** – a gerjesztőtekercs párhuzamos az armatúrával: $U_g = U_k$.

A söntgenerátor rövidzárbiztos: rövidzárlatkor a kapocsfeszültség, így a gerjesztés is összeomlik, ezért az áram nem nő a végtelenségig. Ezért használták gépjárművek áramforrásaként.

ℹ Söntgenerátor: rövidzárbiztos ($I_{max} > I_z$), ezért gépjárművek energiaforrása volt.

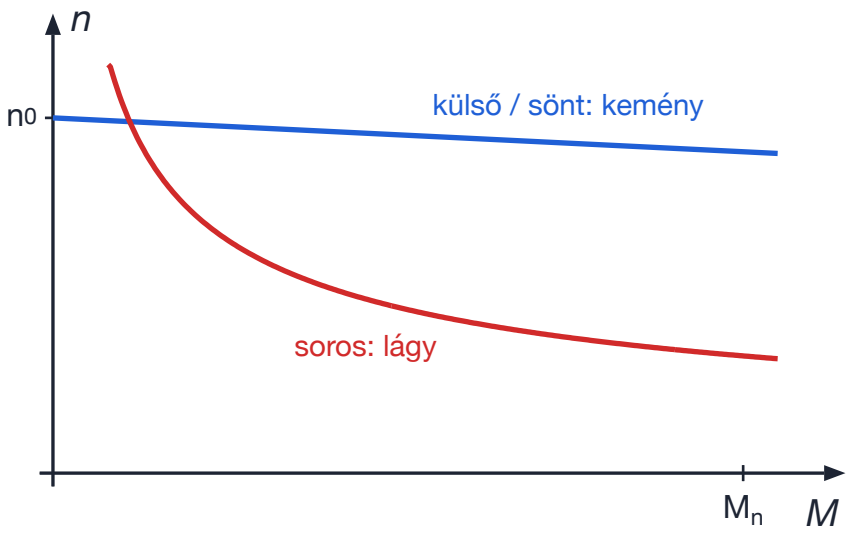
Soros gerjesztés

Soros gerjesztésnél a gerjesztőtekercs az armatúrával sorba van kötve, így ugyanaz az áram folyik rajtuk.



Soros gerjesztés – a gerjesztőtekercs sorba van kötve az armatúrával: $I_g = I_a$.

Mivel a fluxus az árammal arányos, a nyomaték az áram négyzetével arányos. Kis fordulatszámon, nagy áramnál, nagyon nagy a nyomaték. Ezért használják indítómotornak, villamosokban és kéziszerszámokban.



SOROS MOTOR NYOMATÉKA

$$M = k \cdot I_a^2$$

A soros motornak nincs üresjárási fordulatszáma: terhelés nélkül a fordulatszáma veszélyesen megnő. Ezért terhelés nélkül indítani tilos.

⚠ Soros motort terhelés nélkül indítani **tilos** – „elszalad”.

A külső és párhuzamos gerjesztésű motor fordulatszáma a terheléssel alig változik, ez a jó fordulatszámtartás.

EZT JEGYEZD MEG!

- Külső: független forrás. Sönt: $U_g = U_k$. Soros: $I_g = I_a$.
- Soros motor: $M \propto I_a^2$, nagy indítónyomaték.

Egyenáramú motorok üzemeltetése

Az egyenáramú motor jellemzői sokféleképpen változtathatók. Indításkor a nagy áramot előtét-ellenállással vagy csökkentett kapocsfeszültséggel korlátozzuk.

Feladat	Megoldás
indítás	előtét-ellenállás, kapocsfeszültség csökkentése (az indítóáram korlátozása)
forgásirány-váltás	a gerjesztőtekercs **vagy** az armatúratekercs pólusainak felcserélése
fordulatszám-változtatás	kapocsfeszültség csökkentése, áramfelvétel szabályozása, fluxusgyengítés
fékezés	ellenáramú fékezés, rekuperációs (visszatápláló) fékezés, dinamikus fékezés

A forgásirányt úgy váltjuk, hogy vagy a gerjesztőtekercs, vagy az armatúra polaritását felcseréljük. Ha mindkettőt cserélnénk, a forgásirány nem változna.

⚠ Csak az egyiket cseréld! Ha mindkettő polaritása megfordul, a forgásirány marad.

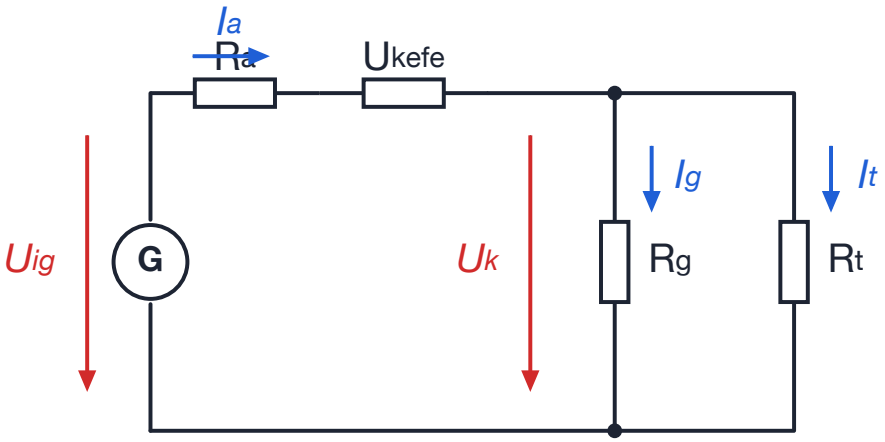
Képletkártya

Indukált feszültség	$U_i = k \cdot \Phi \cdot \omega \; (= C \cdot \Phi \cdot n)$
Nyomaték	$M = k \cdot \Phi \cdot I_a$
Gépállandó	$k = \frac{2 \cdot N \cdot p}{\pi}$
Generátor	$U_i = U_k + I_a R_a + U_{kefe}$
Motor	$U_i = U_k - I_a R_a - U_{kefe}$
Fordulatszám-arány (Φ = áll.)	$\frac{U_{i1}}{U_{i2}} = \frac{n_1}{n_2}$
Soros gerjesztés	$I_g = I_a, M = k \cdot I_a^2$
Párhuzamos (sönt) gerjesztés	$U_g = U_k, I_g = \frac{U_k}{R_g}$

Mintafeladat: söntgenerátor és söntmotor (Órai feladat (Példatár 9.4))

A feladat

Az órai feladat: egy 250 voltos kapocsfeszültségű egyenáramú söntgenerátor percenként 400 fordulattal forgatva 50 kilowatt hasznos teljesítményt ad le.



$U_k = 250\ V$ $n_g = 400\ 1/min$ $P = 50\ kW$ $R_a = 0{,}02\ \Omega$ $R_g = 50\ \Omega$ $U_{kefe} = 2\ V$

Az armatúra ellenállása 0,02 ohm, a gerjesztőkör ellenállása 50 ohm, a keféken 2 volt esik. Mekkora lesz a fordulatszám, ha a gépet ugyanerre a 250 voltra kapcsolva söntmotorként használjuk, és a hálózatból 50 kilowattot vesz fel?

ℹ Az órai jegyzet szerint ez a feladattípus nem lesz a ZH-ban, de jól mutatja a generátor és a motor közötti különbséget.

1. Generátorként

A terhelő áram 50 000 watt osztva 250 volttal, vagyis 200 amper. A gerjesztőáram 250 osztva 50-nel, 5 amper.

$$I_t = \frac{50000\ \text{W}}{250\ \text{V}} = 200\ \text{A},\ I_g = \frac{250\ \text{V}}{50\ \Omega} = 5\ \text{A}$$

Generátornál az armatúra adja mindkét áramot, így az armatúraáram 205 amper.

$$I_a = I_t + I_g = 205\ \text{A}$$

Az indukált feszültség nagyobb a kapocsfeszültségnél, mert fedeznie kell az armatúra- és a kefeesést: 205 szorozva 0,02, plusz 250, plusz 2, vagyis 256,1 volt.

EREDMÉNY $U_{ig} = I_a\, R_a + U_k + U_{kefe} = 4{,}1 + 250 + 2 = 256{,}1\ \text{V}$

2. Motorként

Motorként a hálózatból felvett áram 200 amper. Ebből 5 amper a gerjesztőtekercsbe folyik, így az armatúrára 195 amper jut.

$$I = \frac{50000}{250} = 200\ \text{A},\ I_{am} = I - I_g = 195\ \text{A}$$

Motornál az indukált feszültség kisebb a kapocsfeszültségnél: 250 mínusz 2 mínusz 195 szorozva 0,02, vagyis 244,1 volt.

EREDMÉNY $U_{im} = U_k - U_{kefe} - I_{am}\, R_a = 250 - 2 - 3{,}9 = 244{,}1\ \text{V}$

A fluxus mindkét esetben ugyanaz, mert a gerjesztőtekercs ugyanarra a 250 voltra kapcsolódik. Ezért az indukált feszültségek úgy aránylanak, mint a fordulatszámok.

$$U_i = C\ \Phi\ n \rightarrow \frac{U_{im}}{U_{ig}} = \frac{n_m}{n_g}$$

A motor fordulatszáma 244,1 per 256,1, szorozva 400-zal, vagyis 381 fordulat per perc.

EREDMÉNY $n_m = \frac{244{,}1}{256{,}1} \cdot 400 = 381\ \frac{1}{\text{min}}$

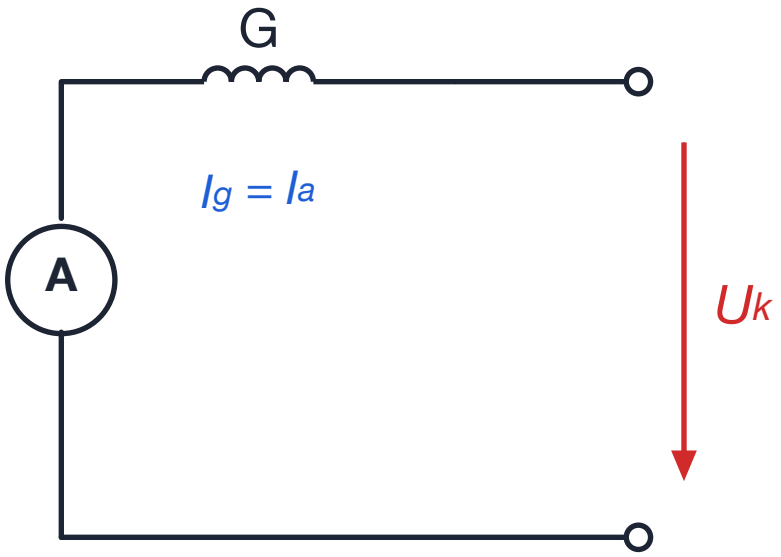
EZT JEGYEZD MEG!

- Generátor: $I_a = I_t + I_g$, $U_i > U_k$.
- Motor: $I_a = I - I_g$, $U_i < U_k$.
- Azonos fluxusnál $U_i \propto n$.

Mintafeladat: soros motor előtét-ellenállással (Példatár 9.7)

A feladat

Egy egyenáramú soros motor teljes ellenállása 1 ohm. A motort 200 voltra kapcsoljuk. Egy adott terhelésnél 15 amper áramot vesz fel, és 800 fordulattal forog.



$R_s = 1\ \Omega$ $U_k = 200\ V$ $I_a = 15\ A$ $n_m = 800\ 1/min$ $R_{előtét} = 5\ \Omega$

Mekkora lesz a fordulatszám, ha egy 5 ohmos ellenállást kapcsolunk vele sorba, és a terhelést úgy változtatjuk, hogy az áram továbbra is 15 amper maradjon?

Keresett: n_m^* az előtét-ellenállással.

Megoldás

Az indukált feszültség előtét nélkül: 200 mínusz 15 szorozva 1, vagyis 185 volt.

$$U_{im} = U_k - I_a R_s = 200 - 15 = 185\ V$$

Az előtéttel a kör ellenállása 6 ohm, így az indukált feszültség 200 mínusz 90, vagyis 110 volt.

$$U_{im}^* = U_k - I_a (R_s + R_{előtét}) = 200 - 15 \cdot 6 = 110\ V$$

Soros motornál a fluxus az áramtól függ. Mivel az áram változatlanul 15 amper, a fluxus is változatlan. Így az indukált feszültségek aránya egyenlő a fordulatszámok arányával.

$$\frac{U_{im}'}{U_{im}} = \frac{n_m'}{n_m}$$

Az új fordulatszám 110 per 185, szorozva 800-zal, vagyis 475,7 fordulat per perc. Az előtét-ellenállás tehát csökkenti a fordulatszámot.

EREDMÉNY $n_m' = \frac{110}{185} \cdot 800 = 475{,}7\ \frac{1}{\text{min}}$

EZT JEGYEZD MEG!

- Előtét-ellenállás → kisebb U_i → kisebb fordulatszám.
- Azonos áramnál a soros motor fluxusa is azonos.

11. Mérőműszerek és mérési hiba

11.1 Mérési hiba és osztálypontosság

Abszolút és relatív hiba

Minden mérésnek van hibája. Az abszolút hiba a mért érték és a helyes érték különbsége.

ABSZOLÚT HIBA

$$H = x_m - x_h$$

A relatív hiba az abszolút hiba a helyes értékhez viszonyítva, százalékban. Ez mutatja meg, mennyire pontos a mérés.

RELATÍV HIBA

$$h = \frac{H}{x_h} \cdot 100\ \%$$

Például ha egy 100 ohmos ellenállást 102 ohmnak mérünk, az abszolút hiba 2 ohm, a relatív hiba 2 százalék.

$$H = 102 - 100 = 2\ \Omega,\ h = \frac{2}{100} \cdot 100\ \% = 2\ \%$$

Osztálypontosság

Az analóg műszerek pontosságát az osztálypontosság adja meg. Ez a végkitérésre vonatkoztatott legnagyobb megengedett hiba, százalékban.

Osztály	Hibahatár	Jelleg
0,05; 0,1; 0,2	±0,05 … ±0,2 %	laboratóriumi
0,5	±0,5 %	laboratóriumi és üzemi
1; 1,5; 2,5; 5	±1 … ±5 %	üzemi

Fontos: a hiba a végkitérésre vonatkozik. Ha a műszer kis kitéréssel mér, a mért értékhez viszonyított relatív hiba sokkal nagyobb lehet. Ezért úgy válasszunk méréshatárt, hogy a mutató a skála felső harmadában álljon.

> ℹ Tipp: a mutató a skála felső harmadában legyen – ott a legkisebb a relatív hiba.

Ha egy mérésből kell az osztálypontosságot meghatározni, a végkitérésre vonatkoztatott hibát mindig felfelé kerekítjük a következő szabványos értékre.

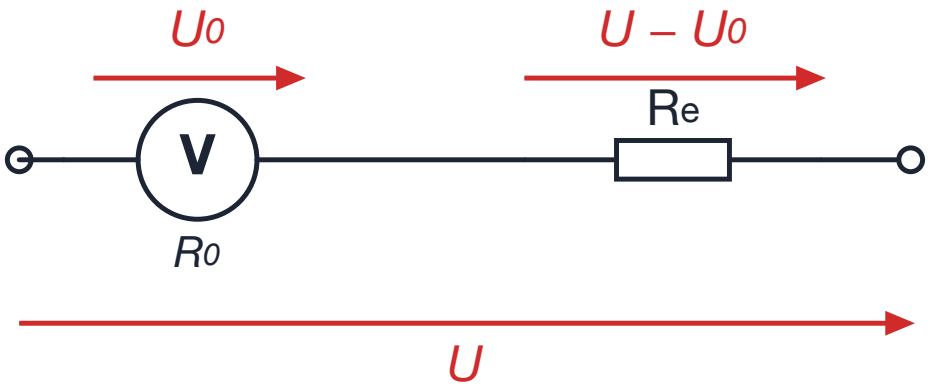
EZT JEGYEZD MEG!

- $H = x_m - x_h$, $h = H/x_h \cdot 100\ \%$.
- Osztálypontosság: végkitérésre vonatkoztatott hiba, felfelé kerekítve.

11.2 Méréshatár-kiterjesztés és wattmérő

Feszültségmérő: előtét-ellenállás

Az alapműszer csak kis feszültséget, U0-t mérhet. Nagyobb feszültség méréséhez vele sorba előtét-ellenállást kötünk, amelyen a többletfeszültség esik.



> **Előtét-ellenállás** – a feszültségmérővel sorba kötött ellenállás, amely a méréshatárt n-szeresére növeli.

A méréshatár-kiterjesztés mértéke n, a mérendő és az alapműszer feszültségének hányadosa. Az előtét-ellenállás n mínusz 1-szerese az alapműszer belső ellenállásának.

ELŐTÉT

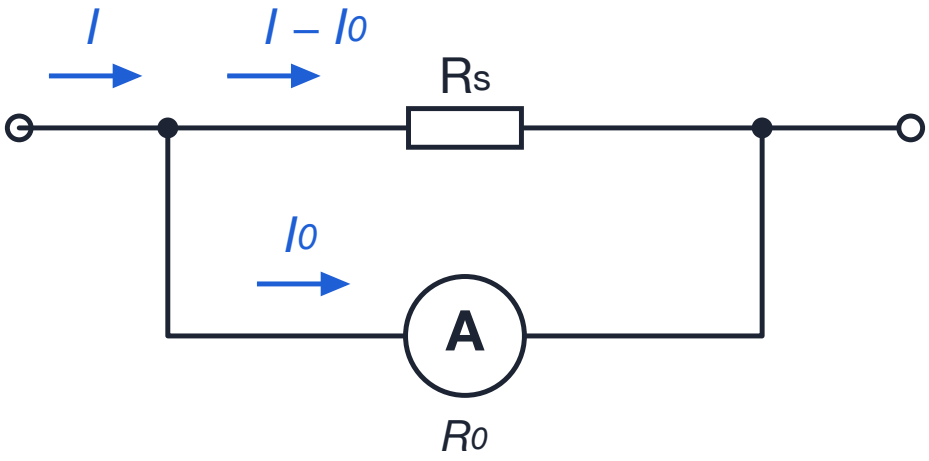
$$R_e = (n-1) \cdot R_0,\ n = \frac{U}{U_0},\ R_0 = \frac{U_0}{I_0}$$

Példa: egy 100 millivoltos, 1 milliamperes alapműszer belső ellenállása 100 ohm. 10 voltos méréshatárhoz n egyenlő 100, az előtét 99 szorozva 100, vagyis 9900 ohm.

$$R_0 = \frac{0{,}1\ \mathrm{V}}{0{,}001\ \mathrm{A}} = 100\ \Omega,\ n = 100,\ R_e = 99 \cdot 100 = 9900\ \Omega$$

Árammérő: sönt-ellenállás

Nagyobb áram méréséhez az árammérővel párhuzamosan sönt-ellenállást kötünk. A többletáram a söntön folyik el.



Sönt-ellenállás – az árammérővel párhuzamosan kötött kis ellenállás, amely a méréshatárt n-szeresére növeli.

A sönt ellenállása az alapműszer belső ellenállása osztva n mínusz 1-gyel.

SÖNT

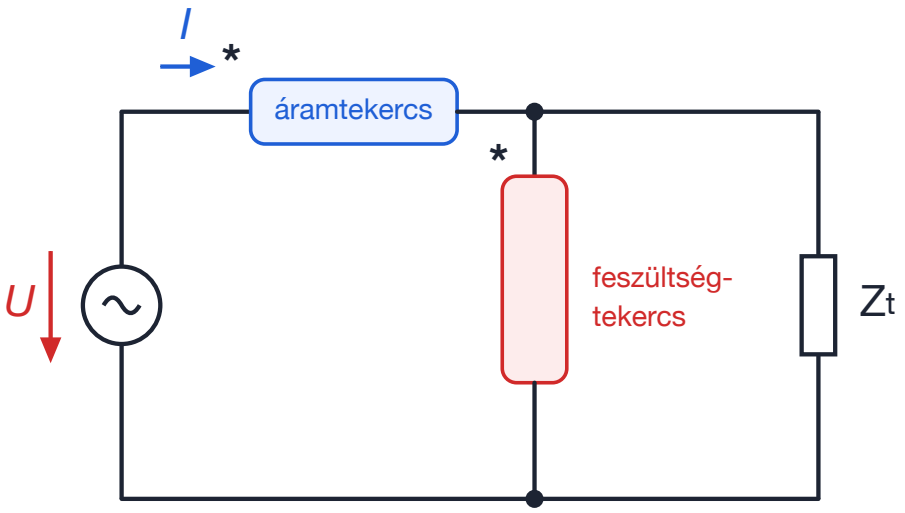
$$R_s = \frac{R_0}{n-1},\ n = \frac{I}{I_0}$$

Az előző műszerrel 1 amperes méréshatárhoz n egyenlő 1000, a sönt 100 osztva 999-cel, körülbelül 0,1 ohm. Nagy áramnál a csatlakozás átmeneti ellenállása is számít, ezért a söntöt külön mérőkapcsokkal készítik.

$$n = \frac{1\ \text{A}}{0{,}001\ \text{A}} = 1000,\ R_s = \frac{100}{999} = 0{,}1001\ \Omega$$

Teljesítménymérés

A wattmérőnek két tekercse van. Az áramtekercset a terheléssel sorba kötjük, így rajta a terhelés árama folyik. A feszültségtekercset a terheléssel párhuzamosan kötjük.



- **áramtekercs**: sorosan a terheléssel
- **feszültségtekercs**: párhuzamosan a terheléssel
- a tekercsek kezdetét * jelöli

Egyenáramon a műszer U szorozva I-t, váltakozó áramon a hatásos teljesítményt, U szorozva I szorozva koszinusz fít mutat.

WATTMÉRŐ

$$P = U \cdot I \text{ (DC)}, P = U \cdot I \cdot \cos \varphi \text{ (AC)}$$

A feszültség-méréshatárt előtét-ellenállással, az áram-méréshatárt az áramtekercs megcsapolásaival lehet állítani.

EZT JEGYEZD MEG!

- Előtét: $R_e = (n-1)R_0$. Sönt: $R_s = R_0/(n-1)$.
- Wattmérő: áramtekercs sorosan, feszültségtekercs párhuzamosan.

11.3 Műszertípusok és a digitális műszer

Analóg műszerek

Az analóg műszerek közül három típust kell ismerni.

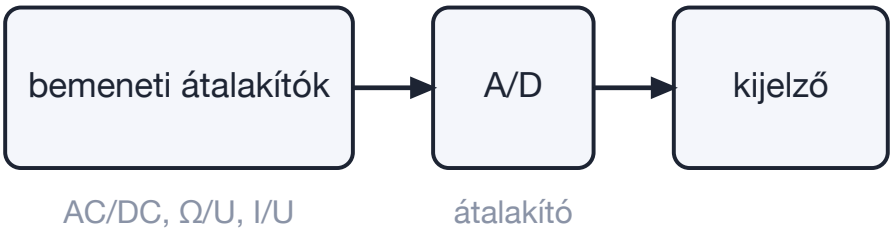
Típus	Működés	Mit mér?
Deprez (lengőtekercses)	állandó mágnes terében forduló tekercs, kitérése $\propto I$, lineáris skála	egyenáram (AC-hez egyenirányító kell)
lágyvasas	a tekercsben felmágneseződő lágyvas lemezek taszítják egymást, kitérés $\propto I^2$	DC és AC, effektív értéket
elektrodinamikus	álló áramtekercs + lengő feszültségtekercs, szorzást végez	teljesítményt (wattmérő)

A Deprez műszer az abszolút középértéket méri, ezért váltakozó áramnál a skálát 1,11-es alaktényezővel korrigálják, hogy effektív értéket mutasson.

ℹ Deprez műszer AC-n: alaktényező 1,11 – szinuszos jelnél így mutat effektív értéket.

Digitális multiméter

A digitális műszer három fő részből áll: bemeneti átalakítókból, egy analóg–digitális átalakítóból és a kijelzőből.



1. **bemeneti átalakítók**: AC/DC, ellenállás → feszültség, áram → feszültség
2. **A/D átalakító**: a feszültséget számmá alakítja
3. **kijelző**

A multiméterrel egyenfeszültséget, váltakozó feszültséget, ellenállást, váltakozó és egyenáramot mérhetünk.

- DV – egyenfeszültség
- AV – váltakozó feszültség
- R – ellenállás
- AC – váltakozó áram
- DC – egyenáram

A digitális műszer hibája két részből áll: a leolvasott értékre vonatkozó hibából és az utolsó digit bizonytalanságából. D a bizonytalan jegyek száma, N a kijelzett szám a tizedesvessző nélkül.

ÖSSZEVONT RELATÍV HIBA

$$h_{\Sigma} = h_{rdg}' + h_{count},\ h_{count} = \frac{D}{N} \cdot 100\ \%$$

Képletkártya

Abszolút hiba	$H = x_m - x_h$
Relatív hiba	$h = \frac{H}{x_h} \cdot 100\ \%$
Végkitérésre vonatkoztatott hiba	$h_v = \frac{H}{x_v} \cdot 100\ \%$
Előtét-ellenállás	$R_e = (n - 1)\ R_0,\ n = \frac{U}{U_0}$
Söntellenállás	$R_s = \frac{R_0}{n - 1},\ n = \frac{I}{I_0}$
Alapműszer belső ellenállása	$R_0 = \frac{U_0}{I_0}$
Wattmérő	$P = U\ I\ (DC),\ P = U\ I \cos \varphi\ (AC)$
Digitális műszer hibája	$h_{\Sigma} = h_{rdg}' + h_{count},\ h_{count} = \frac{D}{N} \cdot 100\ \%$

Mintafeladat: osztálypontosság (Példatár 4.1)

A feladat

Egy rezgésmérő műszerrel mért érték 177 plusz-mínusz 7 hertz. Mekkora a műszer osztálypontossága, ha a végkitérése 600 hertz?

$x_m = 177 \pm 7\ Hz$ $x_v = 600\ Hz$

Keresett: az osztálypontosság.

Megoldás

A mérés bizonytalansága, vagyis az abszolút hiba, 7 hertz.

$$H = \pm 7\ Hz$$

Az osztálypontosság a végkitérésre vonatkoztatott hiba: 7 osztva 600-zal, szorozva 100-zal, ami 1,17 százalék.

$$h_v = \frac{H}{x_v} \cdot 100\,\% = \frac{7}{600} \cdot 100\,\% = 1{,}17\,\%$$

Ezt felfelé kerekítjük a legközelebbi szabványos értékre. A szabványos sor: 0,05; 0,1; 0,2; 0,5; 1; 1,5; 2,5; 5. Az 1,17-nél nagyobb legközelebbi érték az 1,5.

EREDMÉNY osztálypontosság: 1,5

Figyelem: a példatárban a felsorolásban az 1,5 van bekeretezve, a szöveg viszont 2,5-re kerekít. Az 1,5-ös műszer hibahatára 600 hertz 1,5 százaléka, vagyis 9 hertz, ami lefedi a 7 hertzes hibát. Ezért a helyes válasz az 1,5-ös osztály.

✎ A példatárban a felsorolt sorban az **1,5** van bekeretezve, a mondat viszont „2,5-re” kerekít – a kettő ellentmond egymásnak. Az 1,17 %-nál nagyobb legközelebbi szabványos érték az 1,5 (az 1,5-ös műszer hibahatára ±9 Hz ≥ 7 Hz, tehát megfelel), így a helyes válasz **1,5**.

EZT JEGYEZD MEG!

- Végkitérésre vonatkoztatott hiba, mindig felfelé kerekítve.

12. Érintésvédelem

12.1 Érintésvédelem és IP-védettség

Közvetlen és közvetett érintés

Az érintésvédelem az emberek és állatok védelme a veszélyes áram és feszültség ellen.

> **Érintésvédelem** – az élőlényeket veszélyeztető villamos áram és feszültség elleni védelem.

Közvetlen érintésről akkor beszélünk, ha valaki üzemszerűen feszültség alatt álló részt érint meg. Ez ellen szigeteléssel és védőburkolattal védekezünk.

- **Közvetlen érintés**: üzemszerűen feszültség alatt álló rész érintése → szigetelés, védőburkolat.

Közvetett érintésről akkor, ha egy hiba, például szigetelési hiba miatt feszültség alá került fémburkolatot érintünk meg.

- **Közvetett érintés**: hiba miatt feszültség alá került rész (pl. testzárlatos készülékház) érintése.

A szabvány szerint minden 50 voltnál nagyobb váltakozó, vagy 120 voltnál nagyobb egyenfeszültségről működő berendezésnek védelemmel kell rendelkeznie a közvetett érintés ellen.

MIKOR KELL ÉRINTÉSVÉDELEM?

$U > 50\ V\ (AC),\ U > 120\ V\ (DC) \rightarrow$ védelem kell

IP-védettség

A berendezések burkolatának védettségét az IP-kód jelöli. IP az International Protection rövidítése. Két számjegy követi.

1. jegy	szilárd tárgyak, por	2. jegy	víz
0	nincs védelem	0	nincs védelem
1	> 50 mm-es tárgyak ellen	1	függőlegesen csepegő víz ellen
2	> 12 mm-es tárgyak ellen	2	max. 15°-ban ferdén csepegő víz ellen
3	> 2,5 mm-es tárgyak ellen	3	permetező víz ellen (max. 60°)
4	> 1 mm-es tárgyak ellen	4	fröccsenő víz ellen minden irányból
5	por ellen védett (nem káros mértékű behatolás)	5	kisnyomású vízsugár ellen
6	teljesen pormentes	6	erős vízsugár ellen
		7	rövid ideig tartó vízbe merítés ellen (0,15–1 m, 30 perc)
		8	tartós víz alatti használatra (1 m-nél mélyebben)

> **IP-védettség** – International Protection; két számjegy: 1. a szilárd tárgyak (por), 2. a víz behatolása elleni védelem foka.

Az első számjegy a szilárd tárgyak és a por elleni védelmet jelzi, 0-tól 6-ig. A második a víz elleni védelmet, 0-tól 8-ig.

- 1. jegy: 0–6 (szilárd tárgyak, por)
- 2. jegy: 0–8 (víz)

Például az IP44 azt jelenti, hogy a készülék az 1 milliméternél nagyobb tárgyak ellen védett, és minden irányból fröccsenő víz ellen is.

- **IP44**: > 1 mm-es tárgyak ellen + fröccsenő víz ellen
- **IP68**: pormentes + tartós vízbe merítés ellen

Érintésvédelmi megoldások

Többféle érintésvédelmi megoldás létezik.

Megoldás	Lényeg
védőszigetelés (kettős szigetelés)	pl. fúrógép; földelni nem szabad
törpefeszültség	az üzemi feszültség < 50 V
elválasztó transzformátor	a szekunder oldal nem földelhető, csak egy készülék táplálható róla
hibaáram-védőkapcsoló (FI-relé)	0,2 s-on belül lekapcsol
védőföldelés, nullázás	a hibaáram a védővezetőn folyik el, a túláramvédelem lekapcsol

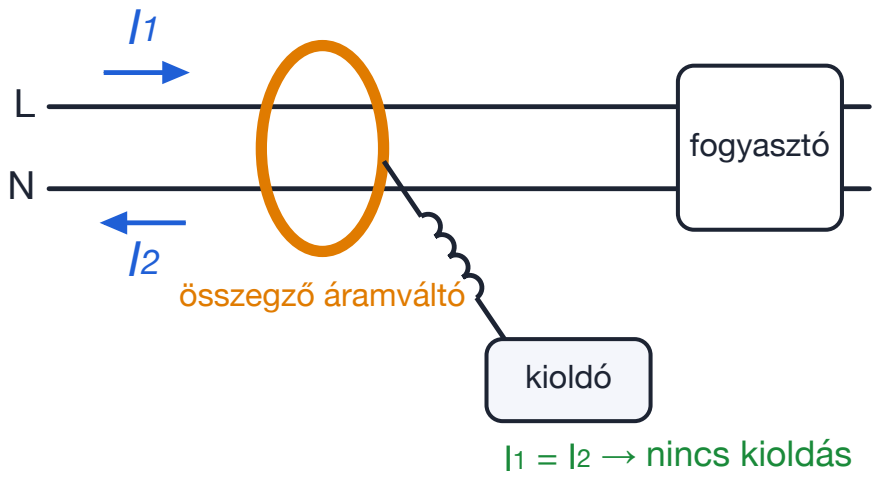
A túláram ellen olvadóbiztosítók és kismegszakítók védenek. A kismegszakító előnye, hogy a hiba megszűnése után visszakapcsolható.

ℹ Olvadóbiztosító: kiolvadás után cserélni kell. Kismegszakító: bimetall (túlterhelés) + elektromágnes (rövidzárlat), visszakapcsolható.

12.2 FI-relé, földelés és hurokimpedancia

A FI-relé

A FI-relé, más néven hibaáram-védőkapcsoló, a német Fehlerstrom szóból kapta a nevét. Feladata, hogy szigetelési hiba esetén 0,2 másodpercen belül lekapcsolja a készülék minden pólusát.



FI-relé (hibaáram-védőkapcsoló) – 0,2 s-on belül minden pólust lekapcsol, ha szigetelési hiba miatt veszélyes érintési feszültség jönne létre.

Minden vezetőt egy összegző áramváltón vezetünk át. Normál esetben a befolyó és a kifolyó áram egyenlő, összegük nulla, így a váltóban nem indukálódik feszültség.

$$I_1 = I_2 \rightarrow \Sigma I = 0 \rightarrow \text{nincs kioldás}$$

Ha testzárlat van, az áram egy része a földön keresztül folyik vissza. Ekkor az áramok összege nem nulla, a váltóban feszültség indukálódik, és a kioldó lekapcsol. A tesztgombbal a hiba szimulálható.

$$I_1 \neq I_2 \rightarrow \Sigma I \neq 0 \rightarrow \text{kioldás } (\leq 0{,}2\ \text{s})$$

A segédföldelő legnagyobb megengedett ellenállása a megengedett érintési feszültség osztva a FI-relé névleges hibaáramával. Például 50 volt és 30 milliamper esetén 1667 ohm.

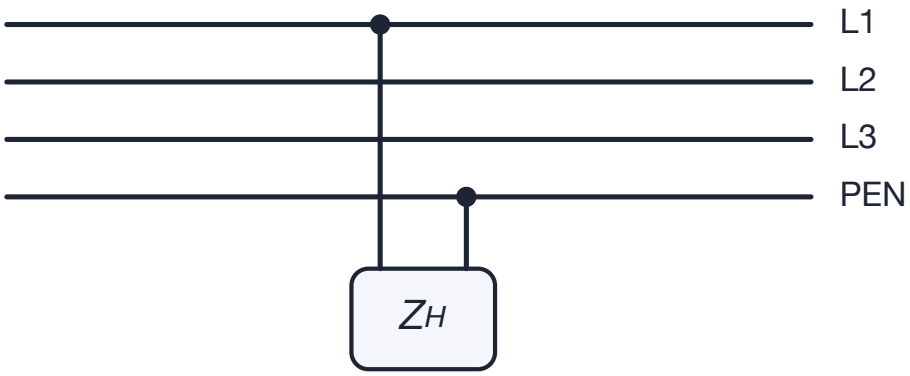
SEGÉDFÖLDELŐ

$$R_A = \frac{U_L}{I_{\Delta n}}$$

$$R_A = \frac{50\ \text{V}}{0{,}03\ \text{A}} = 1667\ \Omega$$

Földelés és hurokimpedancia

A földelési ellenállás azért fontos, mert a hibaáram ezen hozza létre az érintési feszültséget. Mérése váltakozó feszültséggel történik, a hálózatitól eltérő frekvencián, mert a talajban egyenfeszültségek is vannak.



hurok: fázis → hibahely → PE/PEN → vissza

ℹ Földelési ellenállás mérése: váltakozó feszültséggel, 95–110 Hz-en, kompenzációs módszerrel, szondákkal.

Sűrűn lakott helyen nem lehet mérőszondákat elhelyezni, ezért a földelő hurok impedanciáját mérjük. A hurok a fázisvezetőből, a hibahelyből és a védővezetőből áll.

HUROKIMPEDANCIA

$$Z_H \leq \frac{U_0}{I_a}$$

Itt U0 a feszültség a terheletlen fázisvezető és a védővezető között, Ia pedig a túláramvédelem lekapcsolási árama. A hurok impedanciája legfeljebb ekkora lehet, hogy hiba esetén elég nagy áram folyjon a gyors lekapcsoláshoz.

pl. $U_0 = 230\ V$, $I_a = 80\ A \rightarrow Z_H \leq 2{,}88\ \Omega$

EZT JEGYEZD MEG!

- FI-relé: összegző áramváltó, 0,2 s.
- $Z_H \leq U_0/I_a$.

Képletkártya

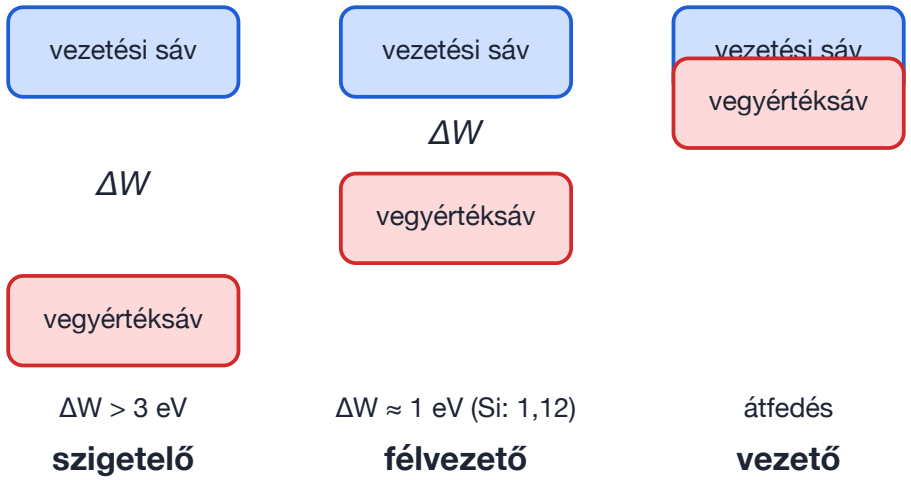
Védelem szükséges	$U > 50\ V\ (AC),\ U > 120\ V\ (DC)$
FI-relé lekapcsolási ideje	$t \leq 0{,}2\ s$
Segédföldelő legnagyobb ellenállása	$R_A = \frac{U_L}{I_{\Delta n}}$
Hurokimpedancia	$Z_H \leq \frac{U_0}{I_a}$

13. Félvezetők, dióda, egyenirányítók

13.1 Félvezetők és a PN-átmenet

Vezető, félvezető, szigetelő

Az anyagokat vezetőképességük alapján három csoportba soroljuk: vezetők, félvezetők és szigetelők. A különbséget a sávmodell magyarázza.



> **Sávmodell** – az elektronok csak megengedett energiasávokban lehetnek; a vegyértéksáv és a vezetési sáv között tiltott sáv (ΔW) van.

Ahhoz, hogy egy anyag vezessen, az elektronoknak a vegyértéksávból át kell jutniuk a vezetési sávba. Szigetelőnél ehhez nagy energia kell, félvezetőnél kicsi, fémeknél a sávok átfedik egymást.

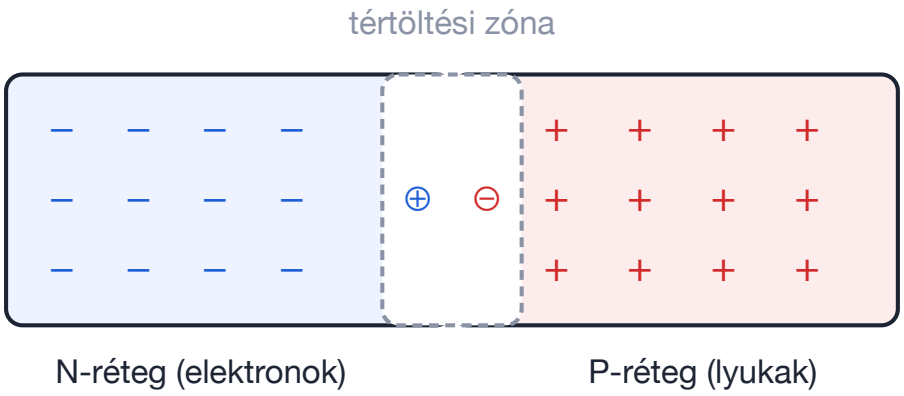
- szigetelő: ΔW > 3 eV
- félvezető: ΔW kicsi (Si: 1,12 eV, Ge: 0,72 eV)
- vezető (fém): nincs tiltott sáv

A szilícium atomjainak négy vegyértékelektronja van. Hő hatására néhány elektron kiszabadul, a helyén lyuk marad. A félvezető vezetőképessége ezért a hőmérséklettel nő.

> ℹ Félvezetőben két töltéshordozó van: a szabad **elektron** (–) és a **lyuk** (+).

Szennyezés és PN-átmenet

A félvezetőt szennyezéssel tesszük használhatóvá. Ha öt vegyértékű atomot, donort viszünk be, többletelektron lesz: ez az N-típusú réteg. Három vegyértékű atommal, akceptorral, lyuk keletkezik: ez a P-típusú réteg.

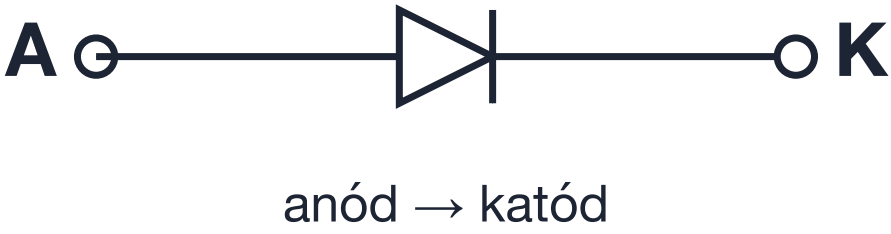


- **N-réteg**: donor atomok, többségi töltéshordozó az elektron
- **P-réteg**: akceptor atomok, többségi töltéshordozó a lyuk

Ha a két réteg érintkezik, az elektronok átvándorolnak a P-rétegbe, a lyukak az N-rétegbe, és a határon semlegesítik egymást. Ott csak helyhez kötött ionok maradnak: ez a tértöltési zóna.

> **PN-átmenet** – a P és N réteg határa; itt a töltéshordozók rekombinálódnak, és szabad töltéshordozó nélküli tértöltési zóna alakul ki (1–10 nm).

Ez a PN-átmenet a dióda. A P-oldal az anód, az N-oldal a katód. A rajzjelben a háromszög csúcsa a katód felé mutat, ez az áram iránya.



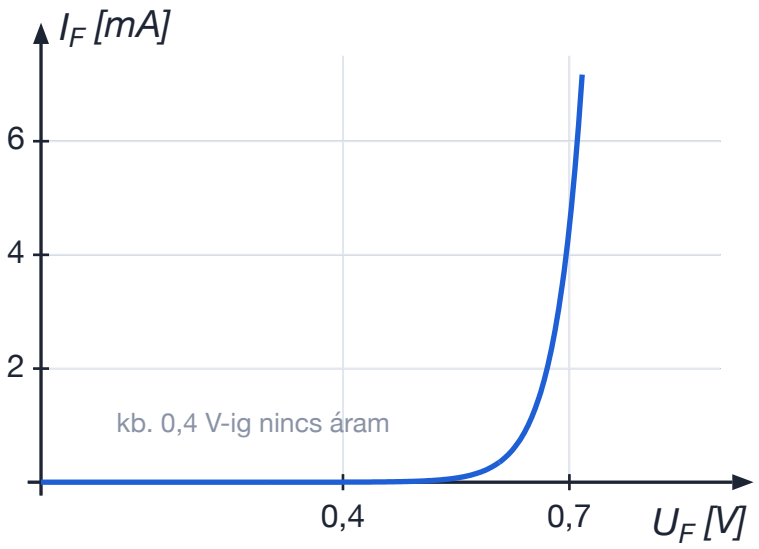
EZT JEGYEZD MEG!

- P-oldal: **anód** (A), N-oldal: **katód** (K).
- Az áram nyitóirányban anódtól a katód felé folyik.

13.2 A dióda karakterisztikái

Nyitóirányú karakterisztika

Nyitóirányban az anód pozitívabb, mint a katód. Körülbelül 0,4 voltig gyakorlatilag nem folyik áram.



Nyitóirány: anód +, katód –.

Utána az áram exponenciálisan nő körülbelül 0,7 voltig, ezután pedig közel arányosan változik a feszültséggel. A szilícium dióda nyitófeszültsége tehát körülbelül 0,6–0,7 volt.

NYITÓFESZÜLTSÉG

$U_F \approx 0{,}6 \ldots 0{,}7\ \text{V (Si)}$

A germánium dióda kisebb feszültségnél nyit, de nagyobb a nyitóirányú ellenállása, és kisebb záróirányú feszültséget bír el.

> ℹ Ge dióda: kisebb nyitófeszültség, de nagyobb záróáram és kisebb letörési feszültség, mint a Si diódáé.

Záróirányú karakterisztika

Záróirányban a katód a pozitívabb. A könyökpontig gyakorlatilag nem folyik áram, csak egy nagyon kicsi záróáram.



Záróirány: katód +, anód –. A könyökpontig csak kis záróáram folyik.

A könyökpont után az áram hirtelen megnő: ez a lavinaletörés. Ha az áramot nem korlátozzuk, a kristály megolvadhat, és a dióda tönkremegy.

⚠ Lavinaletörés: áramkorlát nélkül tönkremegy a dióda.

Ha az áramot korlátozzuk, a záróirányú szakasz feszültségstabilizálásra használható. Ezen az elven működik a Zener-dióda.

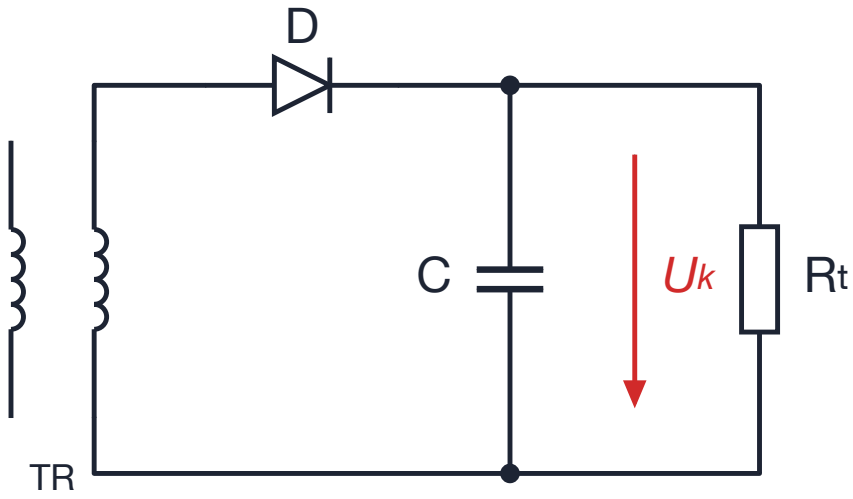
EZT JEGYEZD MEG!

- Nyitóirány: kb. 0,4 V-ig nincs áram, 0,7 V körül vezet.
- Záróirány: a letörésig nincs áram; korlátozott árammal stabilizálásra használható.

13.3 Egyenirányító kapcsolások

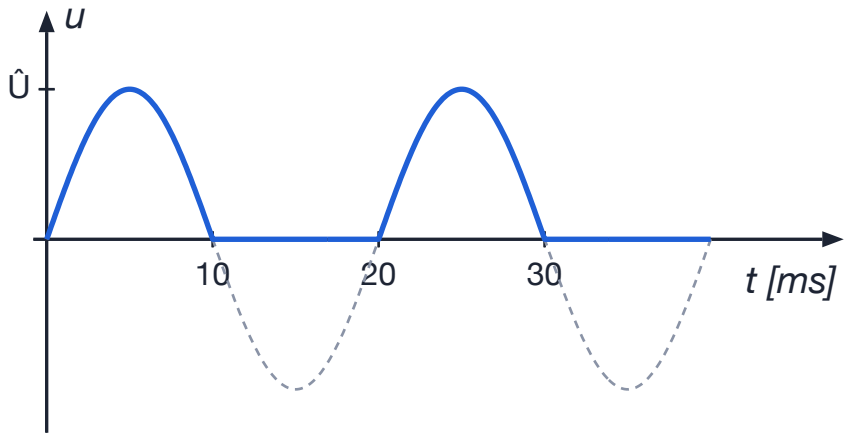
Egyutas, együtemű egyenirányító

A dióda váltakozó feszültség egyenirányítására alkalmas, mert csak egy irányban vezet. A legegyszerűbb kapcsolás az egyutas, együtemű egyenirányító.



Egyutas egyenirányító – egy dióda: csak a pozitív félhullámot engedi át.

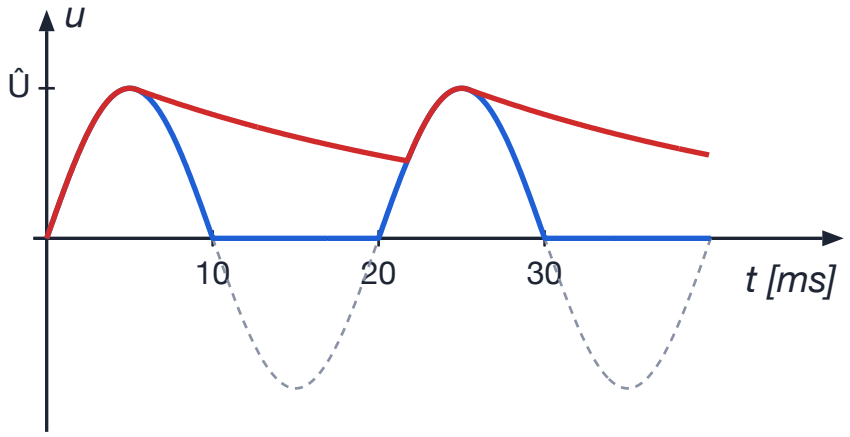
Simító kondenzátor nélkül a kimenet csak a pozitív félhullámokból áll, a negatív félperiódusban nulla. Ez lüktető egyenfeszültség.



KÖZÉPÉRTÉK (KONDENZÁTOR NÉLKÜL)

$$U_e = \frac{\sqrt{2}\,U}{\pi} = 0{,}45\,U$$

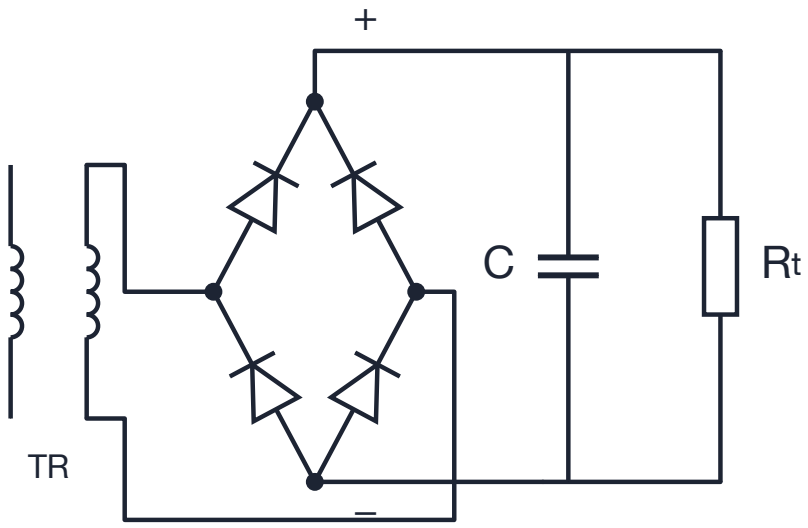
Simító kondenzátorral a kondenzátor a csúcsértékre töltődik, és a félhullámok között a terhelésen keresztül csak lassan sül ki. Így a kimeneti feszültség sokkal egyenletesebb.



ℹ Minél nagyobb a kondenzátor és a terhelő ellenállás, annál kisebb a hullámosság.

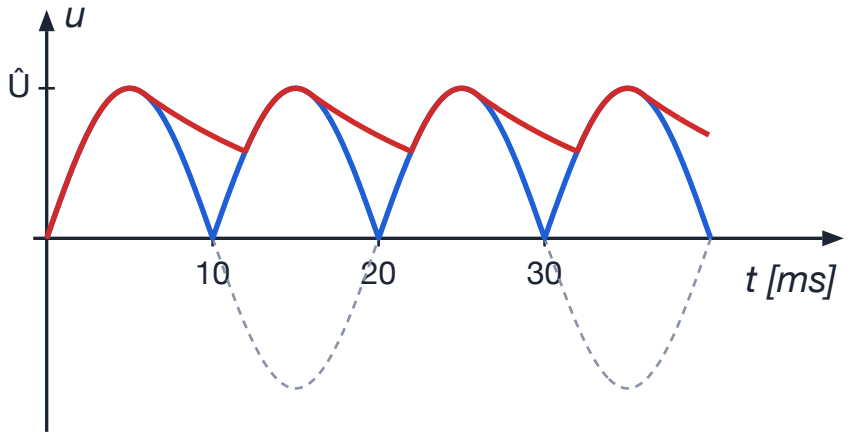
Kétutas egyenirányító: Graetz-híd

A kétutas, kétütemű egyenirányító, a Graetz-híd, négy diódából áll. Mindkét félperiódusban két-két dióda vezet, így a negatív félhullám is pozitív irányban jelenik meg a kimeneten.



Graetz-híd – négy diódás hídkapcsolás: mindkét félhullámot egyenirányítja.

Ezért a középérték kétszerese az egyutasénak, és a hullámosság is kisebb, mert a lüktetés frekvenciája kétszeres.



KÖZÉPÉRTÉK (KONDENZÁTOR NÉLKÜL)

$$U_e = \frac{2\sqrt{2}\,U}{\pi} = 0{,}9\,U$$

Az előadás példája 1000 mikrofarados kondenzátort és 100 ohmos terhelést használ. 10 ohmos terhelésnél a kondenzátor félperiódusonként jelentősen kisül, 100 ohmnál a hullámosság már kicsi.

★ A 68. kérdés: Graetz-híd R = 100 Ω-os terheléssel és simító kondenzátorral (pl. C = 1000 µF) + a kimenő jelalak.

EZT JEGYEZD MEG!

- Egyutas: $U_e = 0{,}45\,U$. Híd: $U_e = 0{,}9\,U$.
- Simító C: a kimenet közelít a csúcsértékhez.

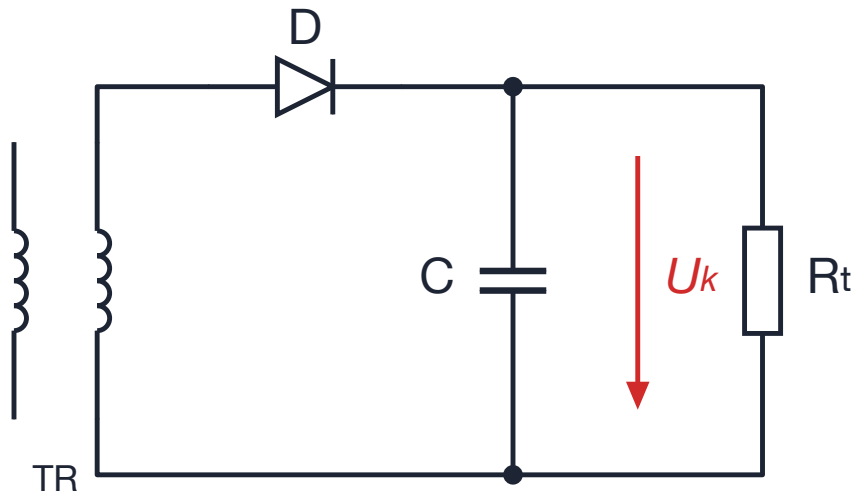
Képletkártya

Egyutas, középérték	$U_e = \frac{\sqrt{2}\,U}{\pi} = 0{,}45\,U$
Egyutas, effektív érték	$U_{eff} = \frac{\sqrt{2}\,U}{2} = \frac{U}{\sqrt{2}}$
Kétutas (híd), középérték	$U_e = \frac{2\sqrt{2}\,U}{\pi} = 0{,}9\,U$
Csúcsérték	$U_{max} = \sqrt{2}\,U$
Általános (p ütemszám)	$U_e = \frac{p}{2\pi}\sqrt{2}\,U\,[\cos\alpha_K - \cos\alpha_V]$
Si dióda nyitófeszültsége	$U_F \approx 0{,}6\ldots0{,}7\ V$

Mintafeladat: egyutas egyenirányító (Példatár 10.01)

A feladat

Egy 230 voltos hálózatból egyutas, együtemű diódás egyenirányítón keresztül egy 230 ohmos ellenállású fogyasztót táplálunk. Simító kondenzátor nincs.



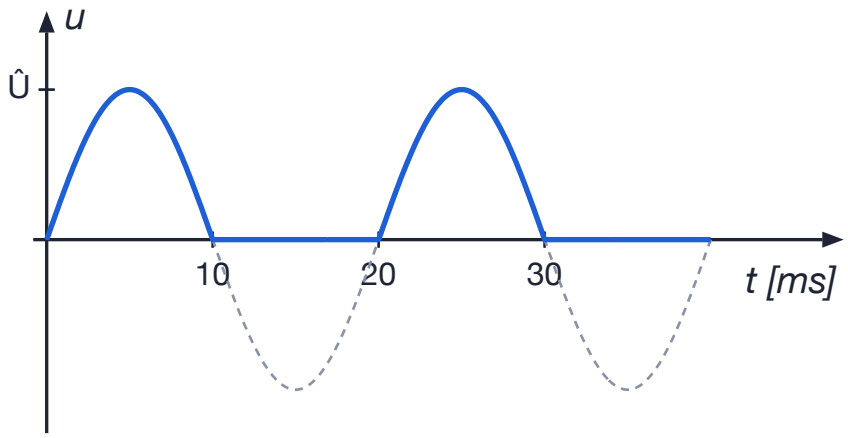
U = 230 V | R = 230 Ω | 1F1U1Ü

Számoljuk ki az egyenirányított feszültség és áram középértékét és effektív értékét, valamint a diódát terhelő legnagyobb feszültséget és áramot!

Keresett: U_e, I_e, U_{eff}, I_{eff}, U_{max}, I_{max}.

Megoldás

A középérték egyutas kapcsolásnál gyök kettő szorozva U, osztva pível: 103,5 volt. Az áram középértéke 103,5 osztva 230-cal, 0,45 amper.



EREDMÉNY $U_e = \frac{\sqrt{2} \cdot 230}{\pi} = 103{,}5\ \text{V},\ I_e = \frac{103{,}5}{230} = 0{,}45\ \text{A}$

Az effektív érték egyutas kapcsolásnál U osztva gyök kettővel: 162,6 volt. Az áram effektív értéke 162,6 osztva 230-cal, vagyis 0,707 amper.

EREDMÉNY $U_{eff} = \frac{230}{\sqrt{2}} = 162{,}6\ \text{V},\ I_{eff} = \frac{162{,}6}{230} = 0{,}707\ \text{A}$

Figyelem: a példatárban az effektív áramnál 0,769 amper szerepel, ez osztási hiba. 162,6 osztva 230-cal 0,707. Ellenőrzésként: egyutas egyenirányításnál az effektív áram a csúcsáram fele, 1,41 per 2, vagyis szintén 0,707 amper.

✎ Példatár: „I_{eff} = 162,6 V / 230 Ω = 0,769 A” – osztási hiba: 162,6 / 230 = **0,707 A**. Ellenőrzés: egyutas egyenirányításnál $I_{eff} = I_{max} / 2$ = 1,41 / 2 = 0,707 A.

A diódát terhelő legnagyobb feszültség a csúcsérték: gyök kettő szorozva 230, vagyis 325,3 volt. A legnagyobb áram 325,3 osztva 230-cal, 1,41 amper.

EREDMÉNY $U_{max} = \sqrt{2} \cdot 230 = 325{,}3\ \text{V},\ I_{max} = \frac{325{,}3}{230} = 1{,}41\ \text{A}$

EZT JEGYEZD MEG!

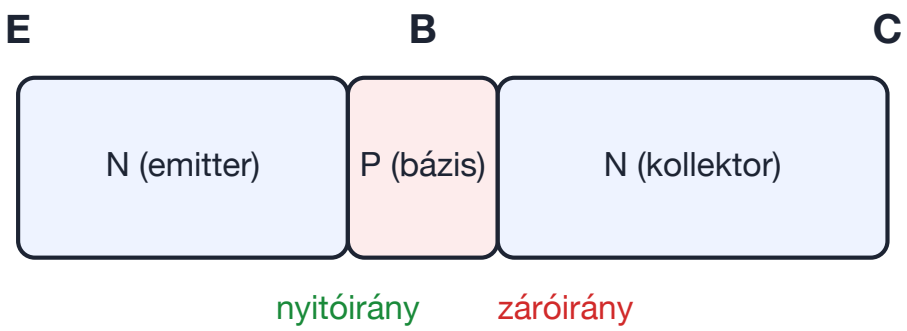
- Egyutas: $U_e = \sqrt{2}U/\pi$, $U_{eff} = U/\sqrt{2}$.
- Dióda csúcsterhelése: $\sqrt{2}\ U$.

14. Bipoláris tranzisztor

14.1 Felépítés és működés

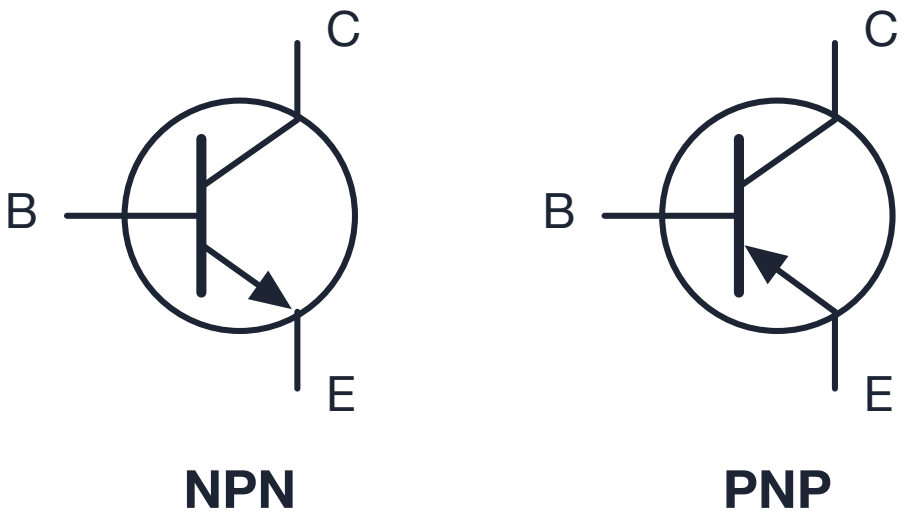
A bipoláris tranzisztor

A bipoláris tranzisztor két PN-átmenetből áll. A rétegek sorrendjétől függően NPN vagy PNP típusú lehet.



> **Bipoláris tranzisztor** – két PN-átmenetet tartalmazó, három rétegű (NPN vagy PNP) félvezető eszköz.

A három kivezetés: a bázis, az emitter és a kollektor. Az emitter kibocsátja, a kollektor összegyűjti a töltéshordozókat, a bázis a vékony középső vezérlőréteg.



- **B** – bázis (alapréteg)
- **E** – emitter (kibocsátó réteg)
- **C** – kollektor (gyűjtő réteg)
- a rajzjelben a nyíl az emitteren van

Hogyan működik?

A működés feltétele: a bázis–emitter átmenet nyitóirányban, a bázis–kollektor átmenet záróirányban van előfeszítve.

> ⚠ B–E átmenet: **nyitóirány**. B–C átmenet: **záróirány**.

A nyitott bázis–emitter átmeneten a töltéshordozók a vékony bázisba jutnak. Nagy részük, 95–99 százalékuk, átjut a kollektorba. Így egy kis bázisáram egy sokkal nagyobb kollektoráramot vezérel. Ez az erősítés lényege.

ÁRAMOK

$$I_E = I_C + I_B,\ I_C = B \cdot I_B$$

Példa: ha a bázisáram 50 mikroamper, és az áramerősítés 200, a kollektoráram 10 milliamper.

$$I_C = 200 \cdot 50\ \mu A = 10\ mA,\ I_E = 10{,}05\ mA$$

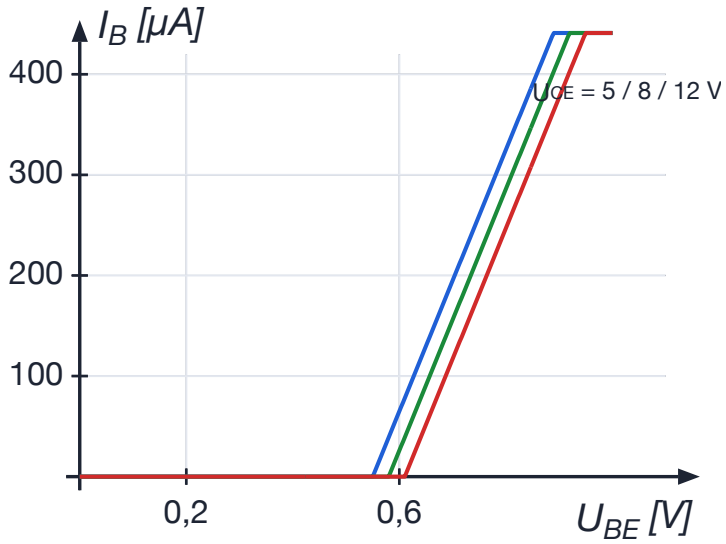
EZT JEGYEZD MEG!

- NPN és PNP; kivezetések: B, E, C.
- B–E nyitó, B–C záró irányban.
- Kis I_B vezérel nagy I_C-t.

14.2 Emitterkapcsolás karakterisztikái

Bemeneti karakterisztika

Emitterkapcsolásban az emitter a közös pont. A bemeneti karakterisztika a bázisáramot mutatja a bázis–emitter feszültség függvényében.



Bemeneti karakterisztika: $I_B(U_{BE})$, paraméter U_{CE}.

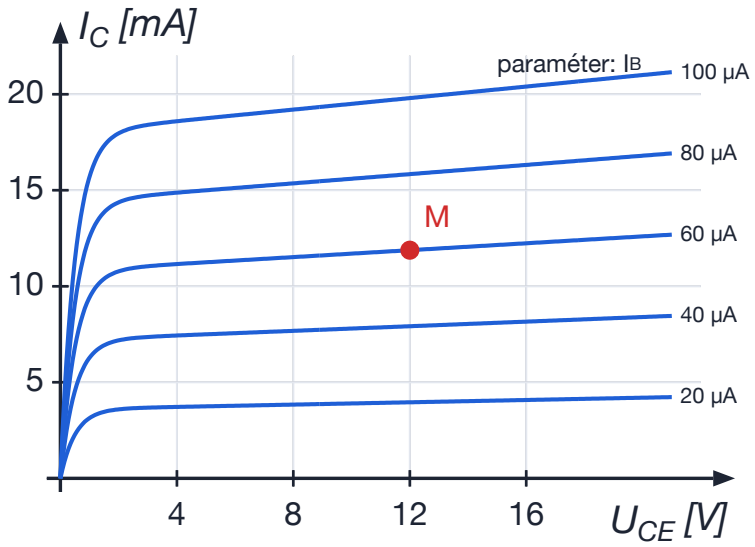
Ez lényegében egy dióda nyitóirányú görbéje: körülbelül 0,6 voltig alig folyik áram, utána meredeken nő. A kollektor–emitter feszültség csak kis mértékben tolja el.

DIFFERENCIÁLIS BEMENETI ELLENÁLLÁS

$$r_{BE} = \frac{\Delta U_{BE}}{\Delta I_B}$$

Kimeneti karakterisztika

A kimeneti karakterisztika a kollektoráramot mutatja a kollektor–emitter feszültség függvényében. Minden görbe egy-egy bázisáramhoz tartozik.



Kimeneti karakterisztika: $I_C(U_{CE})$, paraméter I_B.

Kis feszültségnél a görbe meredeken emelkedik, ez a telítési szakasz. Utána szinte vízszintes: a kollektoráram itt alig függ a feszültségtől, csak a bázisáramtól.

- telítési szakasz: kis U_{CE}, meredek
- aktív (erősítő) szakasz: közel vízszintes, $I_C \approx B \cdot I_B$

A munkapontban, M-mel jelölve, a görbe meredekségéből a kimeneti differenciális ellenállás számítható.

DIFFERENCIÁLIS KIMENETI ELLENÁLLÁS

$$r_{CE} = \frac{\Delta U_{CE}}{\Delta I_C}$$

EZT JEGYEZD MEG!

- Bemenet: dióda-szerű görbe.
- Kimenet: görbesereg, paraméter I_B.

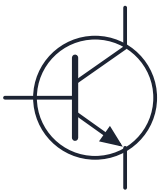
14.3 A három alapkapcsolás

Melyik elektróda a közös?

Attól függően, hogy a tranzisztor három kivezetése közül melyik a közös a bemenet és a kimenet számára, három alapkapcsolás létezik.



emitterkapcsolás



báziskapcsolás



kollektorkapcsolás

Emitterkapcsolás: a bemenet a bázis, a kimenet a kollektor. Báziskapcsolás: a bemenet az emitter, a kimenet a kollektor. Kollektorkapcsolás: a bemenet a bázis, a kimenet az emitter.

- **közös emitteres** (emitterkapcsolás)
- **közös bázisú** (báziskapcsolás)
- **közös kollektoros** (kollektorkapcsolás, emitterkövető)

Összehasonlítás

A három kapcsolásban mások a be- és kimeneti ellenállások, az erősítések és a fázistolás.

	emitterkapcsolás	**báziskapcsolás**	**kollektorkapcsolás**
közös elektróda	emitter	bázis	kollektor
fázisfordítás	van (180°)	nincs	nincs
bemeneti ellenállás	közepes (1–50 kΩ)	kicsi (1–50 Ω)	nagy (100 kΩ–5 MΩ)
kimeneti ellenállás	közepes (10–100 kΩ)	közepes (1–10 kΩ)	kicsi (10–1000 Ω)
feszültségerősítés	nagy (10–100)	nagy (10–100)	< 1 (0,95–0,995)
áramerősítés	nagy (10–100)	< 1 (0,1–0,99)	nagy (10–100)
teljesítményerősítés	nagyon nagy (10^3–10^4)	= feszültségerősítés	= áramerősítés

Az emitterkapcsolás fázist fordít, és mindhárom erősítése nagy, ezért ez a leggyakoribb erősítő. A kollektorkapcsolás feszültségerősítése egynél kisebb, de nagy a bemeneti és kicsi a kimeneti ellenállása, ezért illesztésre használják.

EZT JEGYEZD MEG!

- Emitter: fázisfordítás, nagy feszültség- és áramerősítés.
- Bázis: kis bemeneti ellenállás, áramerősítés < 1.
- Kollektor: feszültségerősítés ≈ 1, nagy bemeneti ellenállás.

Képletkártya

Áramok	$I_E = I_C + I_B$
Áramerősítés	$B = \frac{I_C}{I_B}\ (h_{21e})$
Bemeneti differenciális ellenállás	$r_{BE} = \frac{\Delta U_{BE}}{\Delta I_B}$
Kimeneti differenciális ellenállás	$r_{CE} = \frac{\Delta U_{CE}}{\Delta I_C}$

15. Vizsgafelkészítő összefoglaló

15.1 ZH-stratégia

Hogyan írd meg a ZH-t?

Az utolsó modulban összefoglaljuk, hogyan érdemes megírni a zárthelyit, és átismételjük a legfontosabb képleteket.

60 perc · 40 pont · min. 20 pont

Kezdd az elméleti kérdésekkel! Öt kérdés van, és mindegyikre a képlet, egy kis ábra és egy összefoglaló mondat kell. Ezekre ne szánj többet kérdésenként néhány percnél.

1. **Elméleti kérdések** (5 db): képlet + kis ábra + 1 mondat. Legalább 3 helyes kell a megajánlott jegyhez.

Utána jöhetnek a számítási feladatok. Mindig írd fel az adatokat, rajzold le a kapcsolást, jelöld az irányokat, és csak utána számolj.

2. **Számítási feladat**: adatok → ábra irányokkal → képlet → behelyettesítés → eredmény mértékegységgel.

Minden eredményhez írj mértékegységet, és ha lehet, ellenőrizd egy másik módon, például Théveninnél Nortonnal, háromfázisnál I négyzet R-rel.

EZT JEGYEZD MEG!

- Mértékegység nélkül nincs teljes pont.
- Ellenőrizz második módszerrel, ha van időd.
- Számológép: fok mód, komplex számok.

15.2 Gyors ismétlés: 1. ZH

Áramkörök és tételek

Az első zárthelyi az egyenáramú körökkel kezdődik: Ohm törvénye, a két Kirchhoff-törvény, soros és párhuzamos eredő, feszültség- és áramosztó.

Téma	Kulcsképlet	Kérdés
Ohm	$U = R\,I$	5.
Kirchhoff I. és II.	$\Sigma I = 0$, $\Sigma U = 0$	6–7.
Soros, párhuzamos	$R_e = \Sigma R$, $1/R_e = \Sigma 1/R$	8–9.
Feszültség- és áramosztó	$U_1 = U\,R_1/(R_1+R_2)$, $I_1 = I\,R_2/(R_1+R_2)$	11–12.
Thévenin, Norton	U_0, R_b, $I_z = U_0/R_b$	13–14.
Szuperpozíció	generátoronként, előjelesen	15.

Váltakozó áram, három fázis, transzformátor

Utána a váltakozó áram: reaktanciák, impedancia, teljesítmények és effektív érték. Majd a háromfázisú rendszerek és a transzformátor.

Téma	Kulcsképlet	Kérdés
Soros RC, RL	$X_C = 1/(\omega C)$, $X_L = \omega L$	16–17.
Teljesítmények	$P = UI\cos\varphi$, $Q = UI\sin\varphi$, $S = UI$	18.
Effektív érték	$U = \hat{U}/\sqrt{2}$	19.
Kondenzátorok	soros: reciprokok, párhuzamos: összeg	20–21.
Gerjesztési törvény	$NI = Hl$, $B = \mu_0\mu_r\,NI/l$	22.
Három fázis	$U_v = \sqrt{3}U_f$ (Y), $I_v = \sqrt{3}I_f$ (Δ), $P = \sqrt{3}U_vI_v\cos\varphi$	24–27.
Transzformátor	$4{,}44\,f\,N\,\Phi$, a^2, drop	28–34.

15.3 Gyors ismétlés: 2. ZH

Villamos gépek

A második zárthelyi a villamos gépekkel kezdődik.

Téma	Kulcsképlet / rajz	Kérdés
Aszinkron gép	$n_0 = 60f/p$, szlip, Kloss, teljesítményszalag, M–s görbe	35–41.
Szinkron gép	$n = 60f/p$, szinkronizálás, δ, 4 vektorábra	42–48.
Egyenáramú gép	$U_i = k\Phi\omega$, $M = k\Phi I_a$, gerjesztési módok	49–55.

Mérés, érintésvédelem, elektronika

Végül a mérőműszerek, az érintésvédelem és az elektronika.

Téma	Kulcsképlet / rajz	Kérdés
Műszerek	osztálypontosság, előtét, sönt, wattmérő, DMM	56–60.
Érintésvédelem	IP-kód, FI-relé, $Z_H \leq U_0/I_a$	61–63.
Dióda	PN-átmenet, karakterisztikák, egyutas és híd egyenirányító	64–68.
Tranzisztor	be- és kimeneti karakterisztika, 3 alapkapcsolás	69–70.

Sok sikert a zárthelyihez! Ha bizonytalan vagy egy témában, nézd vissza a hozzá tartozó rövid klipet, és oldd meg újra a mintafeladatot.

Sok sikert! 🎓

Képletkártya

1. ZH – egyenáram	$U = R\ I,\ \Sigma I = 0,\ \Sigma U = 0,\ R_1 \times R_2 = \frac{R_1\ R_2}{R_1 + R_2}$
1. ZH – tételek	$I_t = \frac{U_0}{R_b + R_t},\ I_z = \frac{U_0}{R_b}$
1. ZH – váltakozó áram	$X_L = \omega\ L,\ X_C = \frac{1}{\omega\ C},\ Z = R + j(X_L - X_C),\ P = U\ I \cos \varphi$
1. ZH – három fázis	$Y:\ U_v = \sqrt{3}\ U_f;\ \Delta:\ I_v = \sqrt{3}\ I_f;\ P = \sqrt{3}\ U_v\ I_v \cos \varphi$
1. ZH – transzformátor	$U_i = 4{,}44\ f\ N\ \Phi_{max},\ a = \frac{N_1}{N_2},\ Z_1 = a^2\ Z_2$
2. ZH – aszinkron gép	$n_0 = \frac{60\ f}{p},\ s = \frac{n_0 - n}{n_0},\ M = M_b\ \frac{2}{s/s_b + s_b/s},\ P_m = P_l\ (1 - s)$
2. ZH – szinkron gép	$n = \frac{60\ f}{p},\ \overline{U}_p = \overline{U}_k + jX\overline{I}_a,\ M = \frac{3\ U_k\ U_p}{X\ \omega_0} \sin \delta$
2. ZH – egyenáramú gép	$U_i = k\ \Phi\ \omega,\ M = k\ \Phi\ I_a$
2. ZH – mérés	$h = \frac{H}{x_h}\ 100\ \%,\ R_e = (n - 1)\ R_0,\ R_s = \frac{R_0}{n - 1}$
2. ZH – dióda, tranzisztor	$U_e = 0{,}45\ U$ (egyutas), $0{,}9\ U$ (híd), $I_E = I_C + I_B$